Chapitre 9

Suites réelles

I Généralités

1. Définition d'une suite réelle

Définition - Suite réelle

Une *suite réelle* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est plutôt noté u_n. On dit que u est de *terme général* u_n. La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Remarques.

- Comme ensemble d'applications, l'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Il arrive qu'un suite u ne soit pas définie sur $\mathbb{N}$ tout entier, mais sur $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on note la suite $(u)_{n\geqslant n_0}$ et on dit que u_{n_0} est le terme initial de la suite.

Nous allons voir qu'on peut introduire une suite de plusieurs manières distinctes, qu'il conviendra de bien différencier.

Suites définies explicitement

Définition explicite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement si son terme général est donné explicitement en fonction de n. En d'autres termes, $u_n = f(n)$, pour une fonction f explicite.

Lorsqu'une suite est définie de manière explicite, on a souvent directement accès à certaines de ses propriétés grâce aux propriétés de la fonction f.

Exemple. Les suites $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies explicitement.

Suites définies par récurrence

Définition par récurrence. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

- ses p premiers termes,
- une relation de récurrence qui exprime le terme u_{n+p} en fonction des p termes précédents.

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, on ne peut calculer son terme de rang n qu'après avoir calculé tous les termes précédents. On essaie alors dès que possible de trouver l'expression explicite de la suite.

Exemple. La suite de Fibonacci : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Suites définies de manière implicite

Définition implicite. Le terme général u_n de la suite est défini comme l'unique solution d'une équation dépendant de n.

Dans ce cas, on ne connaît pas explicitement la valeur de u_n, mais seulement une propriété qui caractérise u_n.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, qu'on note u_n.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$, et on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Le théorème de la bijection assure alors que f_n définit une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, 1]$. Par conséquent, il existe un unique réel dans $[0, 1]$, qu'on note u_n, tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. Suites majorées, minorées, bornées

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (*resp.* minorée, *resp.* bornée), si l'ensemble $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de ses valeurs est majoré (*resp.* minoré, *resp.* borné). En d'autres termes,

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si : $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant M$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si : $\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant m$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si : $\exists K\geqslant 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant K$.

Exemples. La suite $\big(\sin(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La suite $\big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété vraie à partir d'un certain rang. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathscr{P}$ *à partir d'un certain rang* s'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geqslant N}$ vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1 à partir d'un certain rang signifie : $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant 1$.

Remarque. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si elle est majorée à partir d'un certain rang. De même pour les cas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.

Démonstration. il suffit de montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée à partir d'un certain rang, alors elle est majorée. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant N}$ est majorée par M. On note ensuite $M'=\max\{u_n,\ 0\leqslant n<N\}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors majorée par $\max(M,M')$, ce qui conclut. □

3. Variations

Définition - Sens de variation

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- *croissante* (*resp. strictement croissante*) si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$ (*resp.* $u_{n+1}>u_n$),
- *croissante* (*resp. strictement croissante*) si : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\leqslant u_n$ (*resp.* $u_{n+1}<u_n$),
- *monotone* (*resp. strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (*resp.* strictement croissante ou strictement décroissante),
- *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ u_{n+1}=u_n$.

Exemples. La suite $((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone. La suite $\left(\left\lfloor\frac{5}{n}\right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Étude de la monotonie d'une suite

Pour déterminer la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut :

- montrer que $u_{n+1}-u_n$ est de signe constant,
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes *strictement positifs*, comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1,
- étudier la fonction f si pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est donné par $u_n=f(n)$.

⚠ Cas d'une suite récurrente : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$, f croissante $\not\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante !
f décroissante $\not\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante !

II Limite d'une suite

Dans toute la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle.

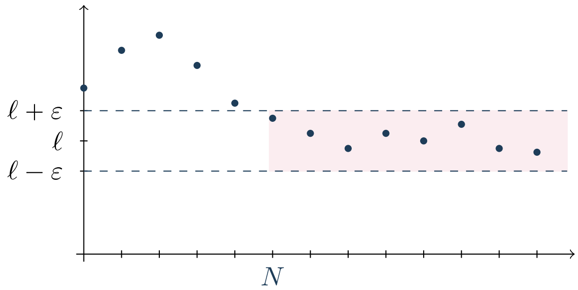
1. Définitions et premières propriétés

On dit qu'une suite réelle converge vers ℓ si tout voisinage de ℓ contient tous les réels u_n à partir d'un certain rang. Ceci se récrit de la manière suivante.

Définition - Suite convergente

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* vers un réel ℓ, ou a pour limite ℓ, si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers une limite finie, on dit qu'elle *diverge*.

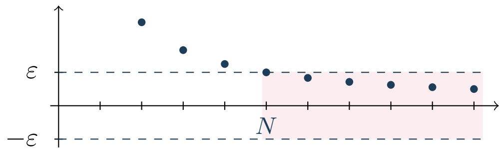


Remarque. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ainsi, si $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, alors $\forall n \geqslant N,\ \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.



Exercice 1. Montrer que si $q \in]-1,1[$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

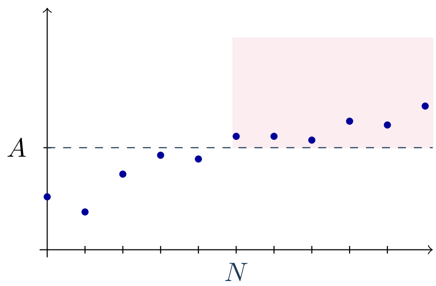
Théorème

Si $\ell \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |v_n| < \varepsilon$. Si $N' \in \mathbb{N}$ est tel que $\forall n \geqslant N',\ |u_n - \ell| \leqslant v_n$, alors en notant $N'' = \max(N, N')$, on a : $\forall n \geqslant N'',\ |u_n - \ell| < \varepsilon$, d'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. ☐

Définition - Limite infinie

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A.$$
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si
$$\forall A < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant A.$$



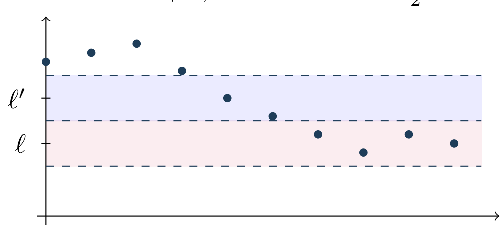
Exercice 2. Montrer que si $q \in]1,+\infty[$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Théorème - Unicité de la limite

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$: si la suite converge aussi vers $\ell' \in \mathbb{R}$ avec $\ell' \neq \ell$, on choisit $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{2}$.

Soient $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$ et $\forall n \geqslant N',\ |u_n - \ell'| < \varepsilon$. Si on note $N'' = \max(N, N')$, alors pour tout $n \geqslant N''$, on a $|u_n - \ell'| < \varepsilon$, donc
$$\begin{aligned} |u_n - \ell| = |u_n - \ell + (\ell - \ell')| &\geqslant |\ell - \ell'| - |u_n - \ell'| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$
ce qui est une contradiction. Ainsi, $\ell = \ell'$.



Si maintenant $\ell' = +\infty$, on considère $N_1, N_1 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N_1,\ |u_n - \ell| < 1$ et $\forall n \geqslant N_2,\ u_n > \ell + 1$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors pour tout $n \geqslant N$, $u_n < 1 + \varepsilon$ et $u_n > \ell + 1$, il y a contradiction. Les autres cas sont de simples adaptations, et sont laissées en exercice. ☐

Théorème - Suite convergente, suite bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant N$, on a alors $|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$.
Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est bornée à partir du rang N, donc bornée. □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais ne converge pas.

2. Limites et opérations

Théorème - Limites et somme, produit

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limites respectives $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors

i. $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$,

ii. $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$, et en particulier, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Ces résultats s'étendent au cas où ℓ, ℓ' avec les opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$, à l'exception des formes indéterminées $(+\infty) + (-\infty)$ et $0 \times \pm\infty$.

Démonstration. On se contente de montrer le résultat lorsque $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, les adaptations aux autres cas sont laissées en exercice.

i. Soit $\varepsilon > 0$. On considère des entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\forall n \geqslant N',\ |v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |u_n - \ell + v_n - \ell'| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci montre que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

ii. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(u_n)_n$ étant bornée, on peut en considérer une borne K. On considère ensuite des entiers N, N' tels que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)}$ et $\forall n \geqslant N',\ |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K}$. On remarque ensuite que si $n \geqslant \max(N, N')$, alors

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| &\leqslant |u_n|\,|v_n - \ell'| + |\ell'|\,|u_n - \ell| \\ &\leqslant K\,\frac{\varepsilon}{2K} + |\ell'|\,\frac{\varepsilon}{2(|\ell'|+1)} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$. □

Remarque. Les cas dits indéterminés traduisent des situations où différents cas de figure peuvent se produire, on ne peut donc pas statuer en général.

- *Cas* $(+\infty) + (-\infty)$: par exemple, $n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $n - n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $n - (n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- *Cas* $0 \times (\pm\infty)$: par exemple, $\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{n}\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Le résultat qui suit fait appel à la notion de limite de fonction, que nous définirons prochainement dans le chapitre LIMITES ET CONTINUITÉ, il sera démontré à cette occasion.

Théorème - Composition de limite

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell, a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, on a :

$$\text{si } \lim_{x\to a} f(x) = \ell, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.$$

En particulier, si f est continue en ℓ, alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$.

On en déduit le résultat suivant.

Théorème - Limites et inverse

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang :

- si $\ell \neq 0$, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$,
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarques.

- On note parfois $u_n \to \ell^+$ (*resp.* $u_n \to \ell^-$) lorsque $u_n \to 0$ et $u_n \geqslant \ell$ (*resp.* $u_n \leqslant \ell$) à partir d'un certain rang. On peut alors écrire dans le contexte ci-dessus : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $\ell = 0$ et u_n n'est pas de signe constant à partir d'un certain rang, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Gestion de certaines formes indéterminées

Voici trois cas où il est aisé de lever une indétermination dans un calcul de limite.

- **Utilisation des croissances comparées.** Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n!} = 0.$$
Les deux premiers résultats proviennent des résultats de croissances comparées vues dans le chapitre Rappels et compléments sur les fonctions réelles, le dernier sera montré plus loin dans ce chapitre. On peut donc directement conclure lorsqu'on est confronté à l'une des formes indéterminées ci-dessus.
- **Utilisation de la quantité conjuguée.** Pour calculer la limite indéterminée d'une suite de la forme $(u_n - v_n)_n$ où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites strictement positives, on peut écrire :
$$u_n - v_n = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n}.$$
Si la limite $\lim u_n^2 - v_n^2$ n'est pas indéterminée, on peut parfois conclure.

  Exemple. Si $u_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors on a
$$u_n = n\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = n\,\frac{1+\frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}, \quad \text{donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
- **Utilisation du nombre dérivé.** Si une fonction réelle f est dérivable en un point a et $(h_n)_n$ est une suite qui converge vers 0, alors
$$\text{comme } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(a), \quad \text{on a } \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(a).$$
Exemple. On retrouve la limite de l'exemple précédent : si $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$, alors
$$u_n = \frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right) - f(1)}{\frac{1}{n}}, \quad \text{donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Un principe pour la gestion de formes indéterminées qu'on ne sait pas gérer est de factoriser les sommes de termes par leur terme dominant, de manière à faire apparaître des termes ayant une limite nulle.

3. Limites et inégalités

Comme nous allons le voir, le résultat suivant est une conséquence directe de la définition de la notion de limite.

Théorème - Limites et inégalités strictes

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $m, M \in \mathbb{R}$, alors :

- si $m < \ell$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang,
- si $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

Démonstration. Montrons le premier point, le second étant analogue.

- *Cas* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell > m$. Soit $\varepsilon = \ell - m$. On considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, si $n \geqslant N$, on a $u_n - \ell > -\varepsilon = m - \ell$, donc $u_n > m$.
- *Cas* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. par définition, il existe N tel que $\forall n \geqslant N,\ u_n > m$. □

Remarque. En particulier, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

⚠ Le résultat devient faux si l'inégalité est large. Par exemple : si $u_n = -\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell = 0$. On a $\ell \geqslant 0$, mais on n'a pas $u_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang.

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités larges

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites admettant une limite et $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. On note ℓ et ℓ' les limites respectives des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\ell > \ell'$. On en déduit alors que la suite $(u_n - v_n)_n$ a pour limite $\ell - \ell' > 0$. Le théorème précédent assure alors qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n - v_n > 0$, ce qui est une contradiction. □

⚠ Le résultat devient faux pour les inégalités strictes.

Par exemple, si $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on peut bien sûr dire que $\ell \leqslant \ell'$, mais pas $\ell < \ell'$. On retiendra que

les inégalités strictes deviennent larges à la limite

4. Théorèmes d'existence de limite

Les théorèmes suivants permettent de démontrer l'existence d'une limite d'une suite réelle dans des cas particuliers.

a. Encadrement, minoration, majoration

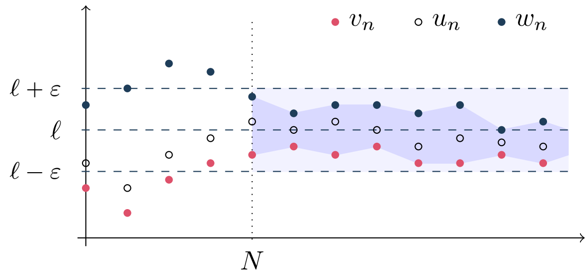
Théorème - Encadrement, comparaison

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on a les propriétés suivantes.

- *Encadrement :* si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- *Minoration :* si $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- *Majoration :* si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Démonstration.

– On suppose qu'à partir du rang N_0, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
Si on fixe $\varepsilon > 0$, on sait qu'à partir d'un certain rang N_1, on a $v_n > \ell - \varepsilon$, et à partir d'un certain rang N_2, on a $w_n < \ell + \varepsilon$.
On pose $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a $\ell - \varepsilon < v_n \leqslant u_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$, donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Ainsi, on a donc bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.



– On se contente de montrer le résultat de minoration : soit $A > 0$. On sait qu'à partir d'un certain rang N_0 on a $v_n \leqslant u_n$, et à partir d'un certain rang N_1, on a $v_n > A$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(N_0, N_1)$, on a $u_n \geqslant v_n > A$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$. □

Remarque. Une conséquence souvent utile est que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. En effet, soit M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant M$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n v_n| \leqslant M|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Exercice 3. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$,
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$.

Exemple. *Règle de d'Alembert pour les suites.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors

– si $\ell < 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
– si $\ell > 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Si $\ell < 1$, on considère q tel que $\ell < q < 1$. On sait qu'il existe un rang N à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Ainsi, si $n \geqslant N$, alors par télescopage,

$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \prod_{k=N}^{n-1} q = q^{n-N}, \quad \text{donc} \quad 0 < u_n < \frac{u_N}{q^N} q^n.$$

Comme $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a par encadrement $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le cas $\ell > 1$ est analogue. □

Plus généralement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites strictement positives, telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang N, le même télescopage donne : $u_n \leqslant \frac{u_N}{v_N} v_n$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui permet d'utiliser directement les théorèmes de minoration ou majoration.

Théorème - Croissance comparée de l'exponentielle et la factorielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\dfrac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. On retrouve donc le résultat de croissance comparée énoncé plus haut : pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{\gamma n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. Si $x = 0$, le résultat est clair. Sinon, en notant $u_n = \frac{|x|^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1}$, ce qui entraîne que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par la règle de d'Alembert. □

b. Théorème de la limite monotone

Théorème - Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_n$ est croissante, alors :
  - si $(u_n)_n$ est majorée, alors elle converge vers $\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$,
  - si $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

  Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on a $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, et donc $u_n \leqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors :
  - si $(u_n)_n$ est minorée, alors elle converge vers $\inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$,
  - si $(u_n)_n$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

  Dans le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on a $\ell = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, et donc $u_n \geqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On se contente de montrer le premier point, le second étant similaire.

- Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Notons $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a $\ell - \varepsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \ell$ par croissance de la suite $(u_n)_n$. Ceci entraîne que $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On a donc montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et fixons $A > 0$. Comme A n'est pas un majorant de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Par croissance, on a alors $u_n > A$ pour tout $n \geqslant N$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. □

Remarques.

- Une suite monotone admet donc toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Si une suite est monotone à partir d'un certain rang, le résultat du théorème est toujours valable.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite *positive* et
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc converge si elle est majorée, et diverge vers $+\infty$ sinon.

c. Théorème des suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si :

- ⋆ les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées,
- ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Le théorème suivant, qui est une conséquence du théorème de la limite monotone, assure que deux suites adjacentes sont toutous convergentes, de même limite, et fournit un encadrement souvent très utile.

Théorème - Théorème des suites adjacentes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors :

i. les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite ℓ finie,
ii. si $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante, alors $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$, donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, donc elle est positive. On a donc bien $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ par décroissance de $(v_n)_n$, donc la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par v_0, elle converge alors vers un réel noté ℓ par le théorème de la limite monotone,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$, donc la suite $(v_n)_n$ est décroissante et minorée, elle converge alors vers un réel noté ℓ'.

Par conséquent, la suite $(v_n - u_n)_n$ converge vers $\ell' - \ell$. D'après la définition des suites adjacentes, on a alors $\ell' - \ell = 0$, soit $\ell = \ell'$. Finalement, on a bien montré que les deux suites convergent vers la même limite ℓ.

La croissance de $(u_n)_n$ et la décroissance de $(v_n)_n$ entraînent donc bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell$. ☐

Exemple. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0,$$

  et $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n!} > 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes, et le théorème des suites adjacentes affirme qu'elles convergent donc toutes deux vers la même limite.

5. Caractérisations séquentielles

Théorème - Caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, alors

$$M = \sup A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A, \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M. \end{cases}$$

- A n'est pas majorée si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.

Le cas de la borne inférieure est analogue.

Remarque. On a : ◇ M est un majorant de A $\Leftrightarrow$ $\sup A \leqslant M$
◇ il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M $\Leftrightarrow$ $\sup A \geqslant M$.

Démonstration.

- Supposons que $M = \sup A$. On sait alors que M est un majorant de A. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > M - \frac{1}{n}$, donc $M - \frac{1}{n} < x_n \leqslant M$. On déduit par encadrement que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$.

  Réciproquement, si $(x_n)_n$ est une suite de A qui converge vers un majorant M de A. On considère un autre majorant de A, noté M'. Comme pour tout n, $x_n \leqslant M'$, on déduit par passage à la limite que $M \leqslant M'$. Finalement, M est le plus petit majorant de A, donc $M = \sup A$.
- Il est clair que s'il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$, alors A n'est pas majoré. Supposons maintenant que A n'est pas majoré. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n n'est pas un majorant de A, donc il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > n$. Par minoration, on déduit alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. ☐

Exercice 4. Soient A, B des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $A+B = \{x+y,\ x \in A,\ y \in B\}$ admet une borne supérieure, et $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Théorème - Caractérisation séquentielle de la densité

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.

Rappel. D'après la caractérisation de la densité vue au chapitre Compléments sur les nombres réels, A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration.

- Si A est dense dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n \in A$ tel que $|x_n - x| < \frac{1}{n}$. Ceci entraîne que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
- Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de A qui converge vers x. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N - x| < \varepsilon$. Ceci conclut car $x_N \in A$. ☐

Remarque. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ entraîne donc que pour tout réel x, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels telle que $q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Définition - Point adhérent à une partie, adhérence

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un *point adhérent* à A s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x.

On appelle *adhérence* de A l'ensemble des points adhérents à A.

Remarques.

- On note souvent $\overline{A}$ l'adhérence de A (attention de ne pas confondre avec le complémentaire). On a bien sûr $A \subset \overline{A}$.
- On remarque que “A est dense dans $\mathbb{R}$” se récrit alors simplement : $\overline{A} = \mathbb{R}$.

III Suites extraites

Définition - Extractrice, suite extraite, valeur d'adhérence

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, on dit que φ est une *extractrice*, et que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite extraite*, ou *sous-suite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite qui converge vers un réel ℓ, on dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarques.

- La suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est autre que l'application $u \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Par stricte croissance de φ, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples.

- La suite $(\sin(n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'extractrice $\varphi : n \mapsto n^2$.
- Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet 1 et -1 pour valeurs d'adhérence : ce sont les limites respectives des sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite, alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.

Démonstration. On écrit la preuve pour $\ell \in \mathbb{R}$, on adapte aisément aux autres cas. On considère une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$, donc on a aussi $|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$, d'où $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Remarque. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui n'a pas de limite, ou deux sous-suites ayant des limites distinctes, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple. Si $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, donc $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Théorème

Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration. On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. On considère des entiers N_1, N_2 tels que $\forall k \geqslant N_1,\ |u_{2k} - \ell| < \varepsilon$ et $\forall k \geqslant N_2,\ |u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon$. On pose $N = \max(2N_1, 2N_2)$ et on fixe $n \geqslant N$.

- Si n est pair, alors on peut écrire $n = 2k$ où k est un entier tel que $k \geqslant N_1$, d'où $|u_n - \ell| = |u_{2k} - \ell| < \varepsilon$.
- Si n est impair, alors on peut écrire $n = 2k + 1$ où k est un entier tel que $k \geqslant N_2$, d'où $|u_n - \ell| = |u_{2k+1} - \ell| < \varepsilon$.

Ainsi, on a montré $\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui conclut. □

Remarque. De même, si les suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Le résultat suivant d'avère pratique pour caractériser le caractère non majoré ou le fait qu'une suite ne diverge par vers $+\infty$ en terme de sous-suite.

Théorème

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée si et seulement si elle possède une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

(ii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si elle possède une sous-suite bornée.

Démonstration.

(i) Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, c'est-à-dire $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{N},\ u_k \geqslant M$, et construisons par récurrence une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- ◇ On sait qu'il existe un entier k tel que $u_k \geqslant 0$, on pose alors $\varphi(0) = 0$, de sorte que $u_{\varphi(0)} \geqslant 0$.
- ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(n)$ construit tel que $u_{\varphi(n)} \geqslant 0$. On a l'existence d'un entier $k > \varphi(n)$ tel que $u_k \geqslant n+1$. En effet, sinon pour tout $k > \varphi(n)$, on a $u_k < n+1$, donc la suite est majorée. On pose alors $\varphi(n+1) = k$, ce qui assure que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geqslant n$, on a $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par majoration.

(ii) Ce point se démontre d'une manière similaire, et est laissé en exercice. □

Le théorème suivant est l'un des théorèmes principaux que nous verrons cette année. Il permettra en particulier de montrer que toute fonction continue sur un segmente est bornée et atteint ses bornes.

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite réelle bornée a une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée dont considère un minorant a et un majorant b. Nous allons construire par récurrence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$ et l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ est infini (en d'autres termes, l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite).

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a bien $b_0 - a_0 = b - a$ et comme $[a_0, b_0]$ contient tous les terme de la suite, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ a_0 \leqslant u_k \leqslant b_0\}$ est infini.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que les réels a_n et b_n sont tels que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ soit infini et $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$. On note ensuite $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
  - ◇ Si $\{k \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_k \leqslant m_n\}$ est infini, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$. Alors $\{k \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leqslant u_k \leqslant b_{n+1}\}$ est infini, et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$.
  - ◇ Sinon, $\{k \in \mathbb{N},\ m_n \leqslant u_k \leqslant b_n\}$ est infini, et on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On a alors les mêmes conséquences que ci-dessus.

Par construction, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus $b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}(b-a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux suites sont adjacentes, et convergent donc vers une même limite ℓ.

On construit ensuite l'extractrice φ par récurrence de la manière suivante.

- ◇ On pose $\varphi(0) = 0$.
- ◇ On suppose $\varphi(n)$ créé, et on définit $\varphi(n+1)$ comme le plus petit entier $k > \varphi(n)$ tel que $a_{n+1} \leqslant k \leqslant b_{n+1}$. Comme $\{k > N,\ a_{n+1} \leqslant u_k \leqslant b_{n+1}\}$ est infini, l'existence de cet entier est assurée.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$, on en déduit par comparaison que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. □

Remarque. On peut reformuler le théorème de Bolzano-Weierstrass de la manière suivante : toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

IV Suites récurrentes

Nous allons étudier ici les suites qui vérifient une relation de récurrence du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction fixée.

Définition - Ensemble stable par une fonction

Soit $f \in \mathscr{F}(E, \mathbb{R})$ on dit qu'une partie A de E est stable par f si $\forall x \in A,\ f(x) \in A$. En d'autres termes, $f(A) \subset A$.

La preuve du résultat suivant repose directement sur le principe de récurrence.

Définition-théorème - Suites récurrentes

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, I un intervalle stable par f et $a \in I$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \tag{$\mathcal{R}$}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$.

Remarques.

- Il est crucial que I soit stable par f pour que l'on puisse définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus : il faut pouvoir assurer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ est bien défini.
- Si l'intervalle I est minoré et/ou majoré, la stabilité de f fournit directement un minorant et/ou un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ⚠ Dans la relation de récurrence qui définit f, il est crucial que f ne dépende pas de n : la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$ n'est pas une suite récurrente.

Exemple. La suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 1}$ est bien définie et bornée.

En effet, soit la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. L'ensemble $[0, 1]$ est stable par f, donc la suite est bien définie, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

⚠ Si f est monotone sur l'intervalle I, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone de même monotonie. Par exemple, si $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, mais la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x$ est croissante.

On peut en revanche obtenir la monotonie de la suite définie par $(\mathcal{R})$ si la fonction $x \mapsto f(x) - x$ ne change pas de signe sur l'intervalle stable I.

Théorème - Monotonie d'une suite récurrente

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $I \subset E$ un intervalle stable par f. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si $x \mapsto f(x) - x$ est négative sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration. Traitons le cas où $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est positive sur I, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$, d'où la croissance de la suite. □

Comme on l'a vu, la monotonie de la fonction f ne donne pas directement la monotonie de la suite récurrente, mais elle donne une information sur le comportement de la suite.

Théorème - Monotonie d'une suite récurrente (2)

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $I \subset E$ un intervalle stable par f. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
- Si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonies opposées.

Remarque. Dans le premier cas, on peut aisément déterminer la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en comparant u_0 et u_1. Dans le second cas, il suffit de comparer u_0 et u_2.

Démonstration.

- Supposons que $u_1 \geqslant u_0$ (l'autre cas est identique). Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. L'initialisation est déjà faite. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} \geqslant u_n$. On a $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ par croissance de f, c'est-à-dire $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
- Il suffit de remarquer que la fonction $f \circ f$ est croissante, et que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente de premier terme u_0 associée à la fonction $f \circ f$, donc elle est monotone par le point précédent. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f(u_{2n+2}) - f(u_{2n})$, donc par décroissance de f sur I, $u_{2n+3} - u_{2n+1}$ et $u_{2n+2} - u_{2n}$ sont de signes opposés. □

⚠ Dans les deux résultats précédents sur la monotonie des suites récurrentes, il est crucial d'étudier la monotonie de f ou de $x \mapsto f(x) - x$ sur un intervalle *stable* par f, sans quoi on ne peut rien déduire sur la suite.

Théorème - Limite d'une suite récurrente et point fixe

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $I \subset E$ un intervalle stable par f. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in I$ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on a :

- ◇ $u_{n+1} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de f
- ◇ $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Ainsi, par unicité de la limite, on a $f(\ell) = \ell$. □

Remarques.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente comme ci-dessus telle que f est continue sur I, alors la recherche de ses points fixes sur I permet de lister toutes les valeurs possibles d'une éventuelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Comme on l'a vu, l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ permet de conclure sur les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les zéros de φ sur I donnent par ailleurs les points fixes de f, donc les limites éventuelles de la suite.

Exemple. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [1, +\infty[, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln x \end{cases}$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie : l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par la fonction $f : x \mapsto 1 + \ln x$, qui est croissante et vérifie $f(1) = 1$. On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
- La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leqslant 0$, donc φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est négative sur $[1, +\infty[$, et l'unique point fixe de f sur $[1, +\infty[$ est 1.

  Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, donc elle converge. Comme 1 est l'unique point fixe de f sur $[1, +\infty[$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

V Extension au cas complexe

On étend l'étude précédente au cas des suites complexes, c'est-à-dire des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il s'agit des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note alors $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.

Pour toute suite complexe u, on a les suites réelles :

- ◇ $\mathfrak{Re}\, u$, de terme général $(\mathfrak{Re}\, u)_n = \mathfrak{Re}(u_n)$,
- ◇ $\mathfrak{Im}\, u$, de terme général $(\mathfrak{Im}\, u)_n = \mathfrak{Im}(u_n)$
- ◇ $\bar{u}$ de terme général $(\bar{u})_n = \overline{u}_n$,
- ◇ $|u|$, de terme général $|u|_n = |u_n|$.

Définition - Suite complexe bornée

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Théorème - Suite bornée, partie réelle, partie imaginaire

Une suite complexe u est bornée si et seulement si les suites réelles $\mathfrak{Re}\, u$ et $\mathfrak{Im}\, u$ sont bornées.

Démonstration.

- Si u est bornée par M, alors pour tout n, $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n| \leqslant M$, et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n| \leqslant M$, donc $\mathfrak{Re}\, u$ et $\mathfrak{Im}\, u$ sont bornées.
- Si $\mathfrak{Re}\, u$ et $\mathfrak{Im}\, u$ sont bornées, respectivement par M et M', alors $|u_n|^2 = (\mathfrak{Re}\, u_n)^2 + (\mathfrak{Im}\, u_n)^2 \leqslant M^2 + M'^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $|u_n| \leqslant \sqrt{M^2 + M'^2}$, et u est bornée. □

Définition - Suite complexe convergente

On dit que la suite complexe u converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Si u est une suite complexe, on a toujours le résultat de majoration : s'il existe une suite réelle v telle que

$$\begin{array}{ll} \diamond\ |u_n - \ell| \leqslant v_n & \text{à partir d'un certain rang} \\ \diamond\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, & \end{array}$$

alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$ converge vers 0. En effet, on a $|u_n| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème - Convergence et partie réelle, partie imaginaire

Soient u une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{Re}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}\, \ell, \\ \mathfrak{Im}\, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Im}\, \ell. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de constater que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell|^2 = |\mathfrak{Re}\, u_n - \mathfrak{Re}\, \ell|^2 + |\mathfrak{Im}\, u_n - \ell|^2$. □

Remarque. Toutes les propriétés n'utilisant pas d'inégalité dans le cas réel sont encore vraies dans le cadre complexe, car les démonstrations reposent sur l'utilisation de l'inégalité triangulaire.

En particulier, une suite complexe convergente est bornée, il y a unicité de la limite, et les théorèmes sur les opérations sont encore valables. En revanche, les théorèmes d'existence ne sont plus valables.

Nous allons voir par ailleurs que le théorème de Bolzano-Weierstrass est toujours vrai dans ce cadre.

Théorème - Théorème de Bolzano-Weierstrass, cas complexe

Toute suite complexe bornée a une sous-suite convergente.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathfrak{Re}\, u_n$ et $b_n = \mathfrak{Im}\, u_n$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathfrak{Re}\, u_n| \leqslant |u_n|$ et $|\mathfrak{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$, les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

- On peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on obtient qu'il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.
- La suite $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée comme sous-suite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc on peut en extraire une sous-suite $(b_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

On remarque ensuite que la suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge comme sous-suite de $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\varphi(\psi(n))} = a_{\varphi(\psi(n))} + \mathrm{i}\, b_{\varphi(\psi(n))}$, la suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

VI Suites particulières

1. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques

On commence par rappeler deux types de suites récurrentes :

- **Les suites arithmétiques** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$. On peut écrire la suite de manière explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- **Les suites géométriques** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$. On peut écrire la suite de manière explicite : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Nous allons généraliser ces deux résultats en considérant des suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$.

Théorème et définition - Suite arithmético-géométrique

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ = \ au_n + b. \qquad (AG)$$

Expression explicite. Si $a \neq 1$, on note ℓ l'unique solution de l'équation $ax + b = x$. Alors la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \lambda a^n + \ell.$$

Remarques.

- Le cas $a = 1$ dans le théorème ci-dessus correspond au cas d'une suite arithmétique, déjà traité ci-dessus. Le cas $b = 0$ correspond au cas d'une suite géométrique.
- Rechercher un réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ revient à rechercher une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à ℓ solution de (AG).

Démonstration. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence ci-dessus. Si $a \neq 1$, l'équation $ax + b = x$ admet $\ell = \frac{b}{1-a}$ pour unique solution. On a par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \ell \ = \ au_n + b - (a\ell + b) \ = \ a(u_n - \ell).$$

Ainsi, la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, ce qui entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \ell = (u_0 - \ell)a^n$. En posant $\lambda = u_0 - \ell$, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \lambda a^n + \ell$. Réciproquement, cette suite vérifie bien la relation de récurrence. □

Exemple. Déterminons l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

L'unique solution de l'équation $x = \frac{x}{2} - 1$ est $\ell = -2$. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$. Comme $u_0 = 1$, on a $\lambda - 2 = 1$, donc $\lambda = 3$. Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2^n} - 2$.

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On dit qu'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *récurrente linéaire d'ordre 2* s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ avec $b \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n \ = \ 0. \qquad (\mathcal{R}_2)$$

On appelle *polynôme caractéristique* associé à la relation de récurrence ci-dessus le polynôme $P = X^2 + aX + b$.

Remarques.

- Si une suite u vérifie la récurrence $(\mathcal{R}_2)$, on sait que la connaissance des deux premiers termes de la suite permet de déterminer la suite entière.
- Les suites géométriques, c'est-à-dire de la forme $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la récurrence $(\mathcal{R}_2)$ sont exactement les suites de la forme $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $P(r) = 0$. En effet, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ r^n\left(r^2 + ar + b\right) = 0).$$

- Dans le cas où P a une unique racine r, la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est vérifie aussi la récurrence $(\mathcal{R}_2)$. En effet, on a alors $r = -\frac{a}{2}$, donc $2r + a = 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)r^{n+2} + a(n+1)r^{n+1} + bnr^n \ = \ nr^n\left(r^2 + ar + b\right) + r^{n+1}(2r + a) \ = \ 0.$$

Comme nous allons le voir, les suites complexes qui vérifient $(\mathcal{R}_2)$ sont en fait exactement les combinaisons linéaires de suites comme dans la remarque ci-dessus, selon le discriminant du polynôme caractéristique.

Plus précisément, les résultats suivants donnent la forme de toutes les suites vérifiant la récurrence $(\mathcal{R}_2)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ils seront démontrés ultérieurement.

Théorème - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : cas complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R}_2)$, de polynôme caractéristique P, alors :

- Si P admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si P admet une seule racine complexe r_0, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)\, r_0^n.$$

Remarque. Les résultats ci-dessus donnent dans tous les cas la forme du terme général de la suite, il suffit alors de trouver les nombres λ et μ à partir des termes u_0 et u_1 en résolvant un système.

Exercice 5. Déterminer l'unique suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1+4\mathrm{i}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (3-2\mathrm{i})u_{n+1} - 5(1-\mathrm{i})u_n \end{cases}$$

Solution. Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - (3-2\mathrm{i})X + 5(1-\mathrm{i})$, de discriminant $\Delta = -15+8\mathrm{i}$. Comme $1+4\mathrm{i}$ est racine carrée complexe de Δ, on obtient que les racines de P sont $2+\mathrm{i}$ et $1-3\mathrm{i}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda(2+\mathrm{i})^n + \mu(1-3\mathrm{i})^n$.

Comme $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda(2+\mathrm{i}) + \mu(1-3\mathrm{i})$, on obtient que $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (2+\mathrm{i})^n - (1-3\mathrm{i})^n$.

Théorème - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $(\mathcal{R}_2)$, de polynôme caractéristique P, alors :

- Si P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si P admet une seule racine réelle r_0, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu\, n)\, r_0^n.$$
- Si P admet deux racines distinctes complexes conjuguées $re^{\mathrm{i}\theta}$ et $re^{-\mathrm{i}\theta}$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\,(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)).$$

Exemples.

1. Déterminons l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$

   Le polynôme caractéristique associé à la récurrence ci-dessus est $P = X^2 - X - 1$, qui a pour racines $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   Ainsi, $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \frac{\lambda}{r}_1 + \mu r_2$, ce qui donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases}$. On en déduit que $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Finalement,
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

2. Déterminons l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n. \end{cases}$

   Le polynôme caractéristique associé à la récurrence ci-dessus est $P = X^2 - X + 1$, qui a pour racines $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

et $\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ \lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}.$$

Ainsi, $u_0 = \lambda$ et $u_1 = \frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases}$. On en déduit que $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{3}$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ = \ \cos \frac{n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{n\pi}{3} \ = \ 2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{n\pi}{3}\right) \ = \ 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}.$$

Exercice 6. Déterminer l'unique suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 9, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}$

Le polynôme caractéristique associé à la récurrence ci-dessus est $P = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$, qui a pour unique racine 3. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ (\lambda + \mu\, n)\, 3^n$. Comme alors $u_0 = \lambda$ et $u_1 = 3(\lambda + \mu)$, on a

$$\begin{cases} \lambda = 2 \\ 3(\lambda+\mu) = 9 \end{cases}, \qquad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases} \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ (2+n)\, 3^n.$$