Chapitre 11

Limites – Continuité

Dans tout le chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), à valeurs réelles, et a désigne un point de l'intervalle I ou une extrémité de I.

I Limite d'une fonction

1. Définitions et premières propriétés

Définition - Limite en un point

– On dit que f *admet pour limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $a \in \mathbb{R}$, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$., si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

– On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, si

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) > A.$$

De même, on dit que f admet pour limite $-\infty$ en $a \in \mathbb{R}$ si $\forall A < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \eta \ \Rightarrow\ f(x) < A$.

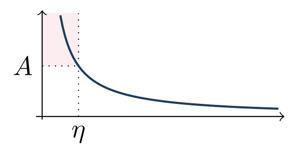
Remarques.

– Il faut comprendre la définition de la limite de la manière intuitive suivante : f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en a si $f(x)$ est *arbitrairement proche* de ℓ, pourvu que x soit *assez proche* de a.
– On étend cette définition au cas où f est définie sur une partie quelconque A de $\mathbb{R}$ et a est un point adhérent à A, c'est-à-dire la limite (finie) d'une suite à valeurs dans A.

⚠ Comme pour les suites, on ne peut écrire $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ qu'après avoir justifié l'existence de la limite.

Exemple. La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ vérifie $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$. En posant $\eta = \frac{1}{A}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ |x| < \eta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\eta} = A$. □



Définition - Limite en $+\infty$

Si $+\infty$ est une extrémité de I, on dit que :

⋆ f *admet* $\ell \in \mathbb{R}$ *pour limite en* $+\infty$, et on note $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

⋆ f *admet* $+\infty$ *pour limite en* $+\infty$, et on note $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) > A,$$

⋆ f *admet* $-\infty$ *pour limite en* $+\infty$, et on note $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si

$$\forall A < 0,\ \exists B > 0,\ \forall \in I,\ x > B \Rightarrow f(x) < A.$$

Remarques.

– On définit de manière analogue les limites d'une fonction en $-\infty$ en remplaçant « $\exists B > 0,\ \forall x > B$ » dans les propositions quantifiées par « $\exists B < 0,\ \forall x < B$ ».

– Les inégalités sont choisies strictes dans toutes ces définitions, mais les notions sont inchangées en choisissant des inégalités larges (par exemple : $\forall x \geqslant B,\ f(x) \geqslant A$). On pourra donc indifféremment utiliser l'une ou l'autre des écritures.
– Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors
$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad\Leftrightarrow\quad f(x)-\ell \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \quad\Leftrightarrow\quad |f(x)-\ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

> ***Démonstration.*** Soit $\varepsilon > 0$. En posant $B = \frac{1}{\varepsilon}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ x > B \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$. □

Une adaptation de la preuve de l'unicité de la limite d'une suite donne l'unicité de la limite d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème - Unicité de la limite

Si f admet une limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique.

Propriété vraie sur un voisinage. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f vérifie une propriété $\mathscr{P}$ *au voisinage de* a :

– s'il existe $\eta > 0$ tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $I \cap]a-\eta, a+\eta[$, dans le cas où $a \in \mathbb{R}$
– s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $I \cap]B, +\infty[$, dans le cas où $a = +\infty$.
– s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $I \cap]-\infty, B[$, dans le cas où $a = -\infty$.

Théorème

Si f admet une limite finie ℓ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. On suppose $a \in \mathbb{R}$. Comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-a| < \eta$, alors $|f(x)-\ell| < 1$. Ainsi,
$$\forall x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[,\quad |f(x)| = |f(x)-\ell+\ell| \leqslant |f(x)-\ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$
On a bien montré que f est bornée sur $I \cap]a-\eta, a+\eta[$. Les autres cas se traitent de la même manière. □

Théorème

Si f possède une limite finie en un point a de I, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : on suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell \neq f(a)$.

On pose $\varepsilon = |f(a)-\ell|$. On sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x-a| < \eta$, on a $|f(x)-\ell| < \varepsilon$. En choisissant $x = a$, on obtient alors $|f(a)-\ell| < \varepsilon$, ce qui est une contradiction. □

2. Limites à gauche, à droite

Définition - Limite à gauche, limite à droite

Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que f admet une *limite* ℓ *à gauche en* a si la restriction $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$. En d'autres termes,

◇ $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad a-\eta < x < a \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$,

◇ $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} +\infty$ si : $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad a-\eta < x < a \Rightarrow f(x) > A$.

Le cas où la limite à gauche vaut $-\infty$ est analogue.

De même, f admet une *limite* ℓ *à droite en* a si la restriction $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ admet ℓ pour limite en a. On note alors $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$.

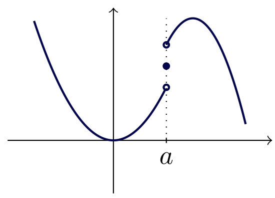
Remarque. Lorsque la limite à gauche (resp. à droite) en a existe, on la note parfois $f(a^-)$ (resp. $f(a^+)$).

Exemples.

- Si $k \in \mathbb{Z}$, alors on a : $\lfloor x \rfloor \underset{x \to k^-}{\longrightarrow} k-1$, et $\lfloor x \rfloor \underset{x \to x^+}{\longrightarrow} k$.
- On a : $\tan x \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$, et $\tan x \underset{x \to \frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarques.

- L'existence de la limite à gauche ou à droite en a ne dépend ni de l'existence, ni de la valeur de $f(a)$.
- **Interprétation graphique.** Lorsque la limite (à gauche ou à droite) de f en a est infinie, on dit que la courbe représentative de f a une *asymptote verticale* d'équation $x = a$.
- ⚠ Les limites à droite et à gauche, si elles existent, peuvent être distinctes, et peuvent différer de $f(a)$ si cette valeur existe.



Théorème - Limite et limites à gauche, à droite

Soit un réel $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I.

- ◇ Si f est définie en a et $\ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \left(f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell,\ f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \text{ et } f(a) = \ell \right)$.
- ◇ Si f n'est définie pas définie en a et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \left(f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \text{ et } f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \right)$.

Démonstration. Nous traitons le premier point, le second en étant une adaptation.

- Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, alors il est clair que $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$. On a aussi montré $f(a) = \ell$ ci-dessus.
- Si maintenant $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(a) = \ell$, on fixe $\varepsilon > 0$, et on sait qu'il existe $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que

$$\forall x \in I,\ a - \eta_1 < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I,\ a < x < a + \eta_2 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Si on pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a alors pour tout $x \in I$, $|x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$, du fait que $f(a) = \ell$. □

3. Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème - Caractérisation séquentielle de la limite

Si $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \text{pour toute suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a,\ f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration. On suppose ici $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, les autres cas sont des adaptations directes.

- Supposons que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Considérons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, et montrons que $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

  On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\eta > 0$ si $x \in I$ est tel que $|x - a| < \eta$, alors on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|x_n - a| < \eta$. Par conséquent, on a $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.
- Montrons la deuxième implication par contraposée : on suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\not\longrightarrow} \ell$, *i.e.* il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x - a| < \eta \ \text{ et } \ |f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon.$$

  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ (en choisissant $\eta = \frac{1}{n}$), il existe un réel $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$. Ceci entraîne que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et $f(x_n) \underset{x \to a}{\not\longrightarrow} \ell$. □

Remarque. Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, il suffit donc par exemple :

- de trouver une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ et $(f(x_n))$ n'a pas de limite,
- de trouver deux suites (x_n), $(y_n) \in I^{\mathbb{N}}$ de limite a telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont des limites distinctes.

Exemple. La fonction cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = 2n\pi$ et $y_n = (2n+1)\pi$. Les suites (x_n) et (y_n) tendent toutes deux vers $+\infty$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\cos x_n = 1$ et $\cos y_n = -1$, donc les suites $(\cos x_n)$ et $(\cos y_n)$ n'ont pas même limite. $\square$

Remarque. On a de même aussi une caractérisation séquentielle pour les limites à gauche et à droite en un point :

$$f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour toute suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n < a,\quad f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

4. Limites et opérations

On déduit de la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction que les opérations sur les limites de fonctions ont les mêmes propriétés que les opérations sur les limites de suites (addition, produit, multiplication par un réel, inverse), vues dans le chapitre Suites réelles. On se contente donc ici de détailler l'effet de la composition de fonctions sur les limites.

Théorème - Composition de limites

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que $f(I) \subset J$. Si a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \quad\text{et}\quad g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell \quad\Rightarrow\quad g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Démonstration. Traitons le cas où $a, \ell \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ tel que $|y - b| < \delta$, on a $|g(y) - \ell| < \varepsilon$. Par ailleurs, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \eta$, on a $|f(x) - b| < \delta$. Ainsi,

$$\forall x \in I,\ |x - a| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \delta \ \Rightarrow\ |g(f(x)) - \ell| < \varepsilon.$$

Ceci montre que $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. $\square$

5. Limites et inégalités

Comme ci-dessus, la caractérisation séquentielle des limites de fonctions entraîne que les résultats sur les limites et inégalités vus dans le chapitre Suites réelles sont directement transposables ici.

Théorème - Passage à la limite des inégalités

Si f et g sont deux fonctions définies sur I possédant une limite finie en a, et si $f \leqslant g$ au voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \ \leqslant\ \lim_{x\to a} g(x).$$

⚠ Comme pour les suites, il convient de remarquer que si $f < g$ sur un voisinage de a, on a bien sûr toujours $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$, mais on n'a pas l'inégalité stricte en général.

Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.

Théorème - Limites et inégalités strictes

Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors :

- pour tout $m < \ell$, on a $f > m$ au voisinage de a,
- pour tout $M > \ell$, on a $f < M$ au voisinage de a.

Remarque. On en déduit : si f et g sont deux fonctions ayant une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, alors $f < g$ au voisinage de a.

Théorème - Encadrement, minoration, majoration

Si f, g, h sont trois fonctions réelles définies sur I et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors on a les propriétés suivantes.

- *Encadrement* : si $g \leqslant f \leqslant h$ au voisinage de a et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

– *Minoration* : si $g \leqslant f$ au voisinage de a et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
– *Majoration* : si $f \leqslant g$ au voisinage de a et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Exemple. Soient f, g sont deux fonctions définies sur I telles que f est bornée et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

En effet, si f est bornée par M, alors on a $0 \leqslant |f(x)g(x)| \leqslant M|g(x)|$ pour tout $x \in I$. On conclut par encadrement.

6. Théorème de la limite monotone

Théorème - Théorème de la limite monotone

– Si f est une fonction monotone, elle admet une limite à gauche et à droite en tout point où cela a un sens. De plus, si $a \in I$ et f est croissante, on a

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x).$$

– Si f est croissante sur l'intervalle $]a, b[$, alors :

si f n'est pas majorée, on a $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, et si f n'est pas minorée, on a $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Remarque. Les énoncés sont analogues si f est décroissante.

Démonstration. On se contente de montrer que, dans le cas où f est croissante sur $]a, b[$ et minorée, f admet une limite à droite en a. Les autres cas sont analogues. Posons $m = \inf\{f(x),\ x \in]a, b[\}$, et montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} m$.

Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) < m + \varepsilon$. Par croissance de f, on a alors pour tout $x \in]a, x_0[$, $m \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) < m + \varepsilon$, donc $0 \leqslant f(x) - m < \varepsilon$. Ainsi, en posant $\eta = x_0 - a$, on a :

$$\forall x \in I, \quad a < x < a + \eta \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon,$$

donc f admet m pour limite à droite en a. □

7. Cas de fonctions à valeurs complexes

Il est possible d'étendre la définition de la notion de limite aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$. Les définitions sont les mêmes, à ceci près qu'on a recours au module dans $\mathbb{C}$ au lieu de la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Définition - Limite d'une fonction à valeurs complexes

Soient un fonction $f : I \to \mathbb{C}$ et a un point ou une extrémité de I. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{C}$ pour limite en a si :

◇ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$ si $a \in \mathbb{R}$,
◇ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x > B,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon,$ si $a = +\infty$.

Le cas où $a = -\infty$ est analogue.

Théorème - Limite et parties réelles, imaginaires

Soient un fonction $f : I \to \mathbb{C}$ et a un point ou une extrémité de I et $\ell \in \mathbb{C}$. On a

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Re}\, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \mathfrak{Re}\, \ell \\ \mathfrak{Im}\, f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \mathfrak{Im}\, \ell \end{array} \right.$$

Démonstration. Comme pour les suites, la preuve repose directement sur la remarque :

$$\left. \begin{array}{l} |\mathfrak{Re}(f(x)) - \mathfrak{Re}(\ell)| \\ |\mathfrak{Im}(f(x)) - \mathfrak{Im}(\ell)| \end{array} \right\} \leqslant |f(x) - \ell| = \sqrt{|\mathfrak{Re}(f(x)) - \mathfrak{Re}(\ell)|^2 + |\mathfrak{Im}(f(x)) - \mathfrak{Im}(\ell)|^2}.$$ □

On en déduit que les propriétés sur les limites finies : unicité, caractère borné localement, caractérisation séquentielle, lien avec les opérations, sont encore vraies dans ce cadre.

⚠ Les résultats sur les inégalités et la monotonie ne tiennent bien sûr pas pour les fonctions à valeurs complexes : les inégalités n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$.

II Continuité

1. Continuité en un point

Définition - Continuité en un point, continuité à gauche, à droite

Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue en a* si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que f est *continue à gauche en a* si $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ est continue en a, c'est-à-dire $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.
- On dit que f est *continue à droite en a* si $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ est continue en a, c'est-à-dire $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarque. La fonction f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle admet une limite en a.

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Elle est par ailleurs continue à droite en tout $k \in \mathbb{Z}$, mais pas continue à gauche.

On déduit directement des résultats sur les limites de fonctions le résultat suivant.

Théorème - Continuité en un point et continuité à gauche, à droite

La fonction f est continue en $a \in I$ si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue à gauche et à droite en 0, donc continue en 0.

Les résultats sur les limites et opérations entrainent directement :

- une combinaison linéaire de fonctions continue en a est continue en a,
- un produit de fonctions continues en a est continu en a,
- l'inverse d'une fonction continue en a qui ne s'annule pas au voisinage de a est continue en a.
- si f est continue en a et g définie et continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

2. Fonction prolongeable par continuité

Définition-théorème - Prolongement par continuité

Soit une fonction $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$. On dit que f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie en a. La fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases}$$

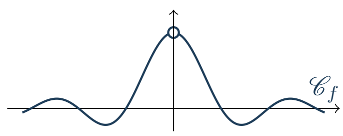
est continue sur I et est appelée *prolongement continu de f sur I*.

Dans la pratique, on notera toujours ce prolongement f.

Exemple. La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

est prolongeable par continuité en 0, d'après la limite usuelle $\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$.



⚠ Attention à ne pas confondre une fonction définie en x_0 et continue en x_0 et une fonction non définie en x_0 prolongeable par continuité en x_0.

3. Caractérisation séquentielle de la continuité

Le résultat suivant découle directement de la caractérisation séquentielle de la limite.

Théorème - Caractérisation séquentielle de la continuité

$$f \text{ est continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \text{pour tout suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} \text{ telle que } x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a,\ f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a).$$

Remarque. En utilisant la contraposée de ce résultat, on peut montrer qu'une fonction est discontinue en un point a : il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I qui tend vers a, mais qui n'a pas de limite, ou encore deux telles suites qui ont des limites distinctes.

Exemple. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, définie par $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est discontinue en tout point.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = 1$.
- Par densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(y_n) = 0$.

Comme $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas même limite, on en déduit que f n'est pas continue en a. □

4. Point de vue global

Définition - Continuité sur un ensemble

On dit que f est *continue sur* I si elle continue en tout point de I. On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I. On note parfois plus simplement $\mathscr{C}(I)$ ou $\mathscr{C}^0(I)$.

Remarque. Les fonctions usuelles : fonctions polynomiales, valeur absolue, fonctions ln, exp, fonctions puissances, fonctions trigonométriques, sont continues sur leur ensemble de définition.

Pour montrer qu'une fonction est continue

- on utilise les résultats généraux sur les intervalles où on peut le faire,
- on étudie séparément (calculs de limite) les points qui posent problème.

5. Le théorème des valeurs intermédiaires

Le résultat suivant est un cas particulier du résultat global qui suivra. On se ramène souvent à ce cas de figure lorsqu'on utilise le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur l'intervalle I et $a, b \in I$ sont tels que $a \leqslant b$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

Démonstration. On suppose par exemple $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. On introduit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence de la manière suivante.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a alors $f(a_0) \leqslant 0$ et $f(b_0) \geqslant 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose a_n et b_n construits tels que $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$, et $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a)$. On note $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.
  - ◇ Si $f(m_n) \geqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.
  - ◇ Si $f(m_n) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

  Dans les deux cas, on a alors $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ et $f(b_{n+1}) \geqslant 0$, et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b - a)$. Par ailleurs, on a $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

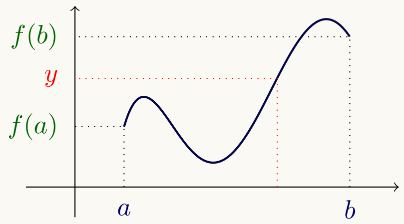
Ainsi, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes, et $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent vers une même limite $x \in [a, b]$. Par continuité, on a $f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, ce qui donne $f(x) \leqslant 0$. De même, $f(b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc $f(x) \geqslant 0$. Finalement, $f(x) = 0$. □

Remarques.

- Le théorème ci-dessus se reformule : toute fonction continue sur un intervalle qui change de signe s'annule sur cet intervalle.
- La contraposée du théorème s'écrit : si une fonction continue sur un intervalle ne s'annule pas sur cet intervalle, alors elle est de signe constant.

Théorème - Théorème des valeurs intermédiaires, version générale



Si f est continue sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a < b$. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = y.$$

Autrement dit, l'image de f est un intervalle.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus à la fonction continue $g : x \mapsto f(x) - y$. Si par exemple $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors on a $g(a) = f(a) - y \leqslant 0$ et $g(b) = f(b) - y \geqslant 0$, donc il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = y$.

Montrons que $f(I)$ est un intervalle : si $y_1, y_2 \in f(I)$ avec $y_1 \leqslant y_2$, il s'agit de montrer que $[y_1, y_2] \subset f(I)$. On fixe $y \in [y_1, y_2]$. On sait qu'il existe $a_1, a_2 \in I$ tels que $y_1 = f(a_1)$ et $y_2 = f(a_2)$. Comme $y \in [f(a_1), f(a_2)]$, on déduit de ce qui précède qu'il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$, donc $y \in f(I)$. □

Remarques.

- Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'*existence* : il établit qu'il existe un tel réel x, mais ne donne pas sa valeur explicite. Par ailleurs, ce réel n'est pas nécessairement unique.
- Le théorème devient faux si la fonction n'est pas continue, ou si l'on ne la considère pas sur un *intervalle* !

Exemple. Cherchons à approcher les racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue $f : x \mapsto x^3 - 4x + 1$.

- Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = -2$, donc il existe $x_2 \in]0, 1[$ tel que $f(x_2) = 0$.
- Comme $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$, donc il existe $x_3 \in]1, 2[$ tel que $f(x_3) = 0$.
- Comme $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(0) = 1$, il existe $x_1 \in]-\infty, 0[$ tel que $f(x_1) = 0$.

On peut par ailleurs affiner ce dernier encadrement : comme $f(-3) = -14$ et $f(-2) = 1$, on a en fait $x_1 \in]-3, -2[$.

Il arrive fréquemment qu'on ait besoin d'introduire une fonction dite "auxiliaire" pour utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. Il sera alors important de choisir la fonction la plus adaptée à la situation.

Exemple. Toute fonction f continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet un point fixe.

Démonstration. On introduit la fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - x$. définie sur $[0, 1]$. La fonction g est continue comme somme de fonctions continues sur $[0, 1]$. Il s'agit de montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = 0$. On a :

- $f(0) \in [0, 1]$ donc $f(0) \geqslant 0$, ce qui donne $g(0) \geqslant 0$,
- $f(1) \in [0, 1]$ donc $f(1) \leqslant 1$, ce qui donne $g(1) \leqslant 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe alors $x \in [0, 1]$ tel que $g(x) = 0$, soit $f(x) = x$. □

6. Le théorème de la bijection

Théorème - Théorème de la bijection

Si f est une continue et strictement monotone sur l'intervalle I, alors

- l'ensemble $J = f(I)$ est un intervalle, et f définit une bijection de I sur J,

– la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est également continue et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Remarque. Ce théorème nous a permis en particulier de définir les fonctions exp, arccos, arcsin et arctan, et donne aussi leur continuité.

Démonstration.

– Le théorème des valeurs intermédiaires assure que $f(I)$ est un intervalle. Comme f est strictement monotone, f est par ailleurs injective sur I. On en déduit que f est une bijection de I sur $J = f(I)$.
– Soit $a \in J$ qui n'est pas l'extrémité gauche de J. Montrons que $f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to a^-]{} f^{-1}(a)$.

  Nous avons déjà montré que f^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que f. Ainsi, la limite ci-dessus existe par le théorème de la limite monotone, notons-la ℓ :

$$f^{-1}(y) \xrightarrow[y\to a^-]{} \ell, \quad \text{donc} \quad f(f^{-1}(y)) \xrightarrow[y\to a^-]{} f(\ell)$$

  par continuité de f. Comme pour tout $y \in J$, $f(f^{-1}(y)) = y$, on a $a = f(\ell)$ par unicité de la limite. Ceci se récrit $\ell = f^{-1}(a)$. On peut conduire le même raisonnement pour la limite à droite, ce qui donne la continuité de f^{-1} en a. S'il se présente, le cas de l'extrémité gauche est plus simple car il ne requiert que la continuité à droite. □

Remarque. On peut par ailleurs décrire de manière précise l'ensemble $f(I)$, selon le type d'intervalle de I et la monotonie de f. Par exemple, si f est continue strictement croissante sur I et

◇ $I = [a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors $f(I) = [f(a), f(b)]$,
◇ $I =]a, b[$, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $f(I) = \left] \lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \right[$.

Exemple. Montrons qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ à l'équation $\mathrm{e}^x + x = 2$.

– La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x$ est continue, strictement croissante comme somme de deux fonctions continues, strictement croissantes.
– Par le théorème de la bijection, f définit alors une bijection de $I = [0, +\infty[$ sur $f(I) = [1, +\infty[$.

Comme $2 \in f(I)$, on a bien existence et unicité d'une solution à l'équation dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 1. Montrer que l'équation $2^x + 3^x = 5^x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^\star$.

La démonstration du résultat suivant n'est pas exigible, et fait l'objet d'un exercice de TD.

Théorème

Si f est continue et injective sur l'intervalle I, alors f est strictement monotone.

7. Théorème des bornes atteintes

Rappel. On appelle *segment* de $\mathbb{R}$ un intervalle fermé borné, c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

Théorème - Théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un segment non vide est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur le segment non vide $[a, b]$. Montrons que f est majorée et atteint son maximum, le cas du minimum est similaire. L'ensemble $A = \{f(x), x \in [a, b]\}$ est non vide, on note alors $M = \sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On sait qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et admet donc une sous-suite convergente dans $[a, b]$: $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in [a, b]$. Par continuité, on a alors $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.

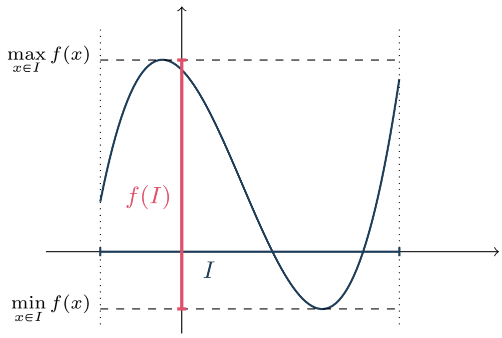
Or $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, donc par unicité de la limite, $M = f(x)$, et $\sup A = \max A = M$, donc f atteint son maximum. □

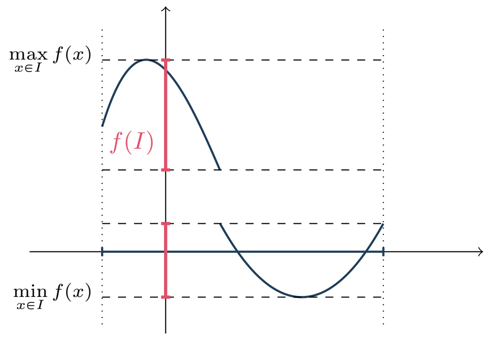
Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. On sait par le théorème des valeurs intermédiaires que l'image d'un segment par une fonction continue est un intervalle, dont on sait par le théorème des bornes atteintes qu'il contient ses bornes, c'est donc un segment. □

Le théorème des bornes atteintes est illustré par la figure de gauche ci-dessous. Attention : lorsque la fonction n'est pas continue, $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle (voir figure de droite).





Exemple. Toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.

Démonstration. Si f est T-périodique, avec $T > 0$, alors f est continue sur le segment $[0, T]$ donc bornée sur $[0, T]$: il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [0, T], \quad |f(x)| \leqslant M$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT \leqslant x < (n+1)T$. Ainsi,par T-périodicité de f, on a : $|f(x)| = |f(x - nT)| \leqslant M$, car $x - nT \in [0, T]$. □

8. Cas de fonctions à valeurs complexes

Comme pour les limites, on peut aisément étendre la définition de la continuité aux fonctions à valeurs complexes.

Définition - Fonction continue à valeurs complexes

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

- Si $a \in I$, on dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
- Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$, ou encore $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant repose directement sur le résultat analogue sur les limites.

Théorème - Fonction continue à valeurs complexes et parties réelle et imaginaire

Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur I si et seulement si les fonctions $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ sont continues sur I.

Les résultats sur la caractérisation séquentielle et les opérations sur les fonctions continues vus plus haut à propos des fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes.

En revanche, les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection n'ont pas de sens dans ce cadre, et ne sont donc pas valables.