Chapitre 15

Dérivabilité

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, ou plus généralement une union d'intervalles non réduits à un point[1], et a désigne un point de I.

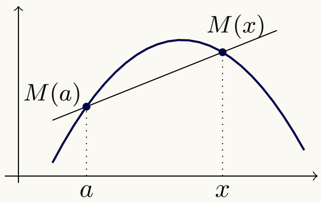
I Dérivée

Définition - Taux d'accroissement

On appelle *taux d'accroissement de f en a* la fonction $\tau_a : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Graphiquement, $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite passant par les points $M(a)$ et $M(x)$ de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.



Définition - Dérivabilité en un point, sur un ensemble

On dit que f est dérivable en a si son taux d'accroissement en a τ_a admet une limite finie lorsque $x \to a$. Dans ce cas, on note cette limite $f'(a)$, et on l'appelle *nombre dérivé* de f en a.

Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle *dérivée* de f sur I la fonction $f : x \mapsto f'(x)$ définie sur I. On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I.

Remarque. Du fait que $a + h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} a$, on obtient par composition de limite que f est dérivable en a si :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{existe et est finie.}$$

⚠ La notation $f(x)'$ est proscrite : $f(x)$ est un *nombre réel*, et non pas une fonction. Lorsqu'on voudra faire apparaître la variable de dérivation, on pourra en revanche écrire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ au lieu de f'.

Définition-théorème - Dérivabilité et dérivabilité à gauche, à droite

On dit que f est *dérivable à gauche* (resp. *à droite*) en a si la fonction τ_a admet une limite à gauche (resp. à droite) en a. Dans ce cas, on note $f'_{\mathrm{g}}(a)$ $\big(\text{resp. } f'_{\mathrm{d}}(a)\big)$ cette limite.

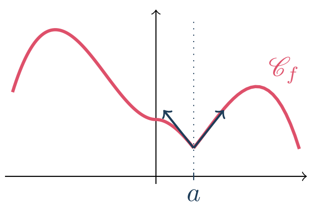
La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a, et $f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$.

Démonstration. Il s'agit d'une simple application des résultats sur les limites. □

Exemple. Si $f : x \mapsto |x|$, on a $f_{\mathrm{g}}(0) = -1$ et $f'_{\mathrm{d}}(0) = 1$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Remarque. Graphiquement, lorsque les dérivées à gauche et à droite existent, $f'_{\mathrm{g}}(a)$ et $f'_{\mathrm{d}}(a)$ désignent les pentes respectives des tangentes à gauche et à droite à la courbe de f.

Lorsque $f'_{\mathrm{g}}(a) \neq f'_{\mathrm{d}}(a)$, ces pentes ne sont pas les mêmes, on parle de *rupture de pente* en a.



⚠ Il s'agit bien de la limite de τ_a dans la définition, et non pas de f'. Comme nous allons le revoir, il peut arriver que f soit dérivable en a, mais que sa dérivée n'admette pas de limite en a.

1. On peut en fait définir plus généralement les notions dans une partie I de $\mathbb{R}$ telle que tout point $a \in I$ est *d'accumulation* : il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E\backslash\{a\}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

Théorème - Dérivabilité et développement limité

La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a, *i.e.* il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie sur I telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \varepsilon(x)(x-a). \tag{1}$$

Dans ce cas, $\ell = f'(a)$. Le développement limité se récrit $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$.

Démonstration. Si f est dérivable en a, on considère la fonction

$$\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ par dérivabilité en a, et pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$.

Par ailleurs, si f vérifie (1), alors pour tout $x \neq a$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell + \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, et f est dérivable en a. □

Remarque. Il arrive fréquemment qu'on écrive le développement limité en changeant de variable, en posant $x = a+h$. On obtient :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h, \quad \text{où} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Définition - Tangente à $\mathscr{C}_f$ en a

Soit f une fonction dérivable en a. La droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée *tangente à la courbe de f en a*.

Remarques.

- Graphiquement, la tangente à la courbe de f en un point a est la droite de pente $f'(a)$ passant par $M(a)$.
- Si f admet une limite infinie en a, on dit que sa courbe admet une tangente verticale en a, d'équation $x = a$.

Théorème - Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a.

Démonstration. Si f est dérivable en a, alors on sait que f admet un développement limité d'ordre 1 en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$. Comme $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, et f est continue en a. □

⚠ La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

Théorème - Opérations sur les fonctions dérivables

(i) Si $f, g \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions λf, $f+g$, fg et, si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$, sont dérivables sur I, et on a alors

$$(\lambda f)' = \lambda f', \qquad (f+g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Ainsi, $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, par produit, et quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas.

(ii) Si $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathscr{D}(J,\mathbb{R})$ et $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I, et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

(iii) Si I est un intervalle et $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ est une bijection de I sur J et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J, et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration.

(i) Les deux premiers points proviennent directement des liens déjà vus entre limite et opérations. Examinons le troisième point : soit $a \in I$, on a alors

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= f(a)\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(x)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)g'(a)+f(a)g'(a),\end{aligned}$$

car f et g sont dérivables en a, et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a)$ par continuité de g en a. Ensuite, si g ne s'annule pas, alors

$$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)(x-a)} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,\frac{1}{g(x)g(a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

On en déduit que $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I, et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

On déduit alors de ce qui précède que $\frac{f}{g}$ est dérivable, et $\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g}+f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

(ii) On peut écrire le développement limité $g(y) = g(f(a))+g'(f(a))(y-f(a))+\varepsilon(y)(y-f(a))$, où $\varepsilon(y) \underset{y\to f(a)}{\longrightarrow} 0$, par dérivabilité de g en $f(a)$. Ainsi, pour $x \neq a$, en choisissant $y = f(x)$ et en divisant par $x-a$,

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = g'(f(a))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\varepsilon(f(x))\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} g'(f(a))f'(a)$$

car par composition de limite, $\varepsilon(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ du fait que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.

(iii) Soient $b \in J$ et $a \in I$ tel que $f(a) = b$, c'est-à-dire $f^{-1}(b) = a$. Comme $f'(a) \neq 0$, on a $\frac{x-a}{f(x)-f(a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)}$.

Par continuité de f^{-1}, on a $f^{-1}(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} f^{-1}(b) = a$ donc par composition de limites,

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} \underset{y\to b}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}, \quad \text{donc} \quad \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

□

II Dérivées d'ordres supérieurs

1. Définition

Rappel On définit les dérivées successives d'une fonction f sur I, lorsqu'elles existent par récurrence : on note $f^{(0)} = f$, et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, si la fonction $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable sur I, on dit que f est n fois dérivable sur I, et on note $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

On note $\mathscr{D}^n(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp^{(n)} = \exp$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto x^p$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et
$$g^{(n)} \;:\; x \;\mapsto\; \begin{cases} p\,(p-1)\dots(p-n+1)\,x^{p-n} = \dfrac{p!}{(p-n)!}\,x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p, \\ 0 & \text{si } n > p. \end{cases}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction inverse $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\quad h^{(n)}(x) = (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}}.$$
4. On déduit du point précédent que si $n \in \mathbb{N}$, alors $\ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\,\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

Définition - Classe $\mathscr{C}^n$, classe $\mathscr{C}^\infty$

- ⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, ou encore $\mathscr{C}^n(I)$.

⋆ On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, ou encore $\mathscr{C}^\infty(I)$.

Exemple. Les fonctions polynomiales, les fonctions exp, cos, sin, arctan sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⚠ Les espaces $\mathscr{D}^1(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ ne sont pas les mêmes : il existent des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue. Par exemple, si on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On constate que f est dérivable sur $\mathbb{R}$: elle l'est sur $\mathbb{R}^\star$ et on a $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, et en 0 car

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = x\sin\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En revanche, f' n'a pas de limite en 0, donc elle n'est pas continue en 0.

2. Opérations sur $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$

Théorème - Combinaison linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \text{ (resp. } \mathscr{C}^\infty(I)) \quad \text{et} \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

Ainsi, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont stables par combinaison linéaire.

Démonstration. Par récurrence aisée : exercice. □

Le théorème suivant donne la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit, et généralise le résultat bien connu de la dérivée d'un produit.

Théorème - Produit : formule de Leibniz

L'espace $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ est stable par produit : si $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$, alors fg est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. De plus,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

De même, $\mathscr{C}^\infty(I)$ est stable par produit.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence et est très semblable à la preuve du binôme de Newton.Le cas où $n = 0$ est évident. Par ailleurs, si on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que le résultat est vrai au rang n et si $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}\end{aligned}$$

Par réindexation dans la première somme. En remarquant que les termes correspondant à $k = 0$ dans la première somme, et $k = n+1$ dans la seconde sont nuls, on a

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

On conclut grâce à la formule de Pascal que le résultat est vrai au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence. □

Théorème - Composition, inverse

Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^n(J,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$. De même, si f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors $g \circ f \in \mathscr{C}^\infty$.

Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f} \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$. De même pour le cas $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. Par récurrence : le cas $n = 0$ est déjà montré. Par ailleurs, si on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que le résultat est vrai au rang n, alors pour $f, g \in \mathscr{C}^{n+1}$, $g \circ f$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. La fonction f' est de classe $\mathscr{C}^n$ et, par hypothèse de récurrence, $g' \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$, donc par produit $(g \circ f)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$. On en conclut que $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
Pour le deuxième point, il suffit de considérer la composition avec la fonction inverse. □

Remarque. Par conséquent, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont stables par quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas.

Théorème - Réciproque

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) et f est bijective de I sur J et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur J.

Démonstration. Par récurrence : exercice. □

III Accroissements finis

Dans cette partie, on suppose que I est un intervalle, et $a \in I$.

1. Extrema locaux et globaux

Définition - Extremum local

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en a si $f \leqslant f(a)$ (resp. $f \geqslant f(a)$ sur un voisinage de a dans I.
On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.

Remarque. On appelle souvent minimiseur (local) de f un point en lequel f admet un minimum (local). Attention à ne pas confondre minimum m de f et minimiseur. On introduit de même la notion de maximiseur de f.

Rappel : $f \leqslant f(a)$ sur un voisinage de a dans I signifie qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[\cap I$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.

Théorème - Condition nécessaire d'optimalité d'ordre 1

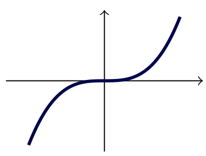
Si f est dérivable en un point a intérieur à I, c'est-à-dire que a n'est pas une extrémité de I, et f admet un extremum local en a, alors
$$f'(a) = 0.$$

Remarque. On appelle *point critique* de f tout point $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$. La condition nécessaire d'optimalité entraîne alors que si f est dérivable sur I, ses minimiseurs et maximiseurs locaux éventuels sont parmi les points critiques de f sur I.

Démonstration. Supposons que f admet en a un minimum local. Il existe alors $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \geqslant f(a)$ (il est possible de choisir η suffisamment petit pour que $]a-\eta, a+\eta[\subset I$, car a n'est pas extrémité de I).
Pour tout $x \in]a-\eta, a[$, on a $f(x) - f(a) \geqslant 0$ et $x - a \leqslant 0$. Par conséquent,
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0, \quad \text{ainsi} \quad f'_{\mathrm{g}}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$
De même, on a $f'_{\mathrm{d}}(a) \geqslant 0$. Comme $f'(a) = f'_{\mathrm{g}}(a) = f'_{\mathrm{d}}(a)$, on a $f'(a) = 0$. □

Remarques.

- Ce théorème donne une condition nécessaire, mais pas suffisante. Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'admet pas d'extremum en 0.



- En revanche, lorsque f est dérivable sur I, si a est un point critique de f *et que f' change de signe en a* alors f atteint un extremum local en a.
- Le résultat n'est valable que si a n'est pas une extrémité de l'intervalle. Par exemple la fonction $g : x \mapsto x$ admet un maximum local en 1 sur $[0,1]$ et un minimum local en 0 sur $[0,1]$, mais aucun de ces points n'est un point critique.

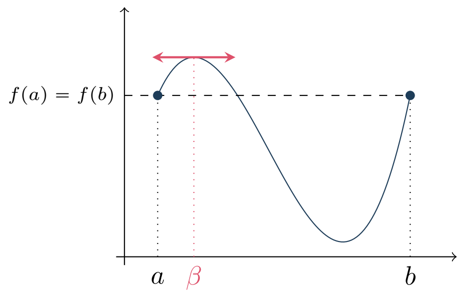
2. Théorème de Rolle

Théorème - Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel c de $]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarques.

- Le théorème est vrai dans le cadre général où f est dérivable sur $]a,b[$ et continue sur $[a,b]$. Il peut bien sûr être utilisé dans le cas particulier où la fonction f est dérivable sur $[a,b]$: dans ce cas, la fonction est aussi continue sur $[a,b]$.
- Interprétation graphique : si $f(a) = f(b)$, la courbe représentative de f possède (au moins) une tangente horizontale, et f admet (au moins) un extremum local sur $]a,b[$.



Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle y admet un minimum et un maximum, d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in [a,b]$ tels que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$$

- Si α et β sont tous deux extrémités de $[a,b]$ alors la condition $f(a) = f(b)$ entraîne que f est constante sur $[a,b]$ (car son minimum est égal à son maximum). Par suite, n'importe quel élément de $]a,b[$ annule la dérivée de f.
- Sinon, l'un au moins des réels α, β n'est pas extrémité de l'intervalle $[a,b]$ et puisque f admet un extremum local en ce point et y est dérivable, la dérivée de f s'y annule. □

Exemple. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet deux racines réelles distinctes alors P' admet au moins une racine réelle.

Si a, b sont deux racines réelles distinctes de P, alors $\widetilde{P}(a) = \widetilde{P}(b) = 0$. Comme $\widetilde{P}$ est dérivable sur $[a,b]$, le théorème de Rolle entraîne l'existence de $c \in]a,b[$ tel que $\widetilde{P}'(c) = 0$.

3. Théorème des accroissement finis

Théorème - Théorème des accroissements finis

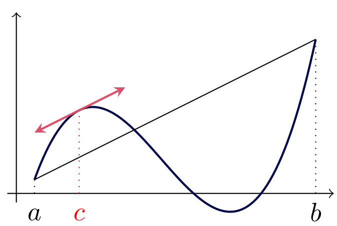
Si f est continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $a < b$, alors il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c).$$

Remarque. Interprétation graphique : l'égalité

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

signifie que la courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Démonstration. On introduit la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g \ : \ x \ \mapsto \ f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a).$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, car f l'est. On remarque par ailleurs que $g(a) = g(b) = 0$. Ainsi, par le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour tout $x \in]a,b[$, on a $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, donc $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, ce qui conclut. $\square$

Théorème - Inégalité des accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et s'il existe deux réels m et M tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors

$$m\,(b-a) \ \leqslant\ f(b)-f(a) \ \leqslant\ M\,(b-a).$$

En particulier, si $|f'|$ est majorée par un réel k sur l'intervalle I, alors pour tous $x, y \in I$,

$$|f(y)-f(x)| \ \leqslant\ k\,|y-x|.$$

Remarque. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(y)-f(x)| \leqslant |y-x|$ pour tous $x, y \in I$, on dit que f est lipschitzienne sur I. On dit même qu'elle est k-lipschitzienne lorsqu'on veut préciser la constante k.

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) \ = \ (b-a)f'(c).$$

Comme $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, ceci donne $m\,(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M\,(b-a)$.
Si $|f'|$ est majorée par $k \in \mathbb{R}$ et $x, y \in I$ avec $x < y$, alors on peut appliquer le point précédent car $-k \leqslant f' \leqslant k$ sur $[x,y]$. On a ainsi $-k\,(y-x) \leqslant f(y)-f(x) \leqslant k\,(y-x)$. $\square$

Exemples.

1. Les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes.

   On a $|\cos| = |-\sin| \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$, donc $|\cos y - \cos x| \leqslant |y-x|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ d'après l'inégalité des accroissements finis. En d'autres termes, cos est 1-lipschitzienne. De même pour sin.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n+1} \ \leqslant\ \ln(n+1)-\ln(n) \ \leqslant\ \dfrac{1}{n}$.

   La fonction $f : x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $[n, n+1]$. Comme $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in [n, n+1]$, on a :

   $$\forall x \in [n,n+1],\quad \frac{1}{n+1} \ \leqslant\ f'(x) \ \leqslant\ \frac{1}{n}, \qquad \text{donc} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \frac{1}{n},$$

   par l'inégalité des accroissements finis.