

Chapitre 17

Analyse asymptotique

Dans ce chapitre, f et g désignent des fonctions d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à E . Par ailleurs, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles.

I Négligeabilité

1. Définition

Définition - Négligeabilité

Fonctions On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a . On dit que f est *négligeable devant g en a* si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

On étend cette définition au cas où $f(a) = g(a) = 0$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.

Cas général : on dit que f est négligeable devant g en a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in V$, et $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Suites Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On note dans ce cas $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ ou plus simplement $u_n = o(v_n)$.

Cas général : on dit que u est négligeable devant v s'il existe une suite ε telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang et $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemples.

$$1. \quad x^2 + \sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^3) \text{ et } (x-1)^2 \underset{x \rightarrow 1}{=} o(\sqrt{x-1}).$$

En effet, $\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{5/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par ailleurs, $\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{3/2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

$$2. \quad \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \text{ car } \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$3. \quad \text{Si } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ avec } \alpha < \beta, \text{ alors } x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \text{ et } x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha).$$

En effet, $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\beta - \alpha > 0$. Par ailleurs $\frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ car $\beta - \alpha > 0$.

Remarques.

– Si h est une fonction réelle définie sur E et $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(h(x))$.

On comprendra alors l'écriture $f(x) = g(x) + o(h(x))$ comme : f s'écrit $f = g + \tilde{h}$ sur un voisinage de a , où $\tilde{h}$ est une fonction telle que $\tilde{h}(x) = o(h(x))$.

De même, si $u_n - v_n = o(w_n)$ où w est une suite réelle, on note $u_n = v_n + o(w_n)$.

– $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1)$ équivaut à $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, de même $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ équivaut à $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De manière plus générale, pour $\ell \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{ssi} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1).$$

Le résultat suivant a déjà été rencontré, et peut se reformuler en termes de négligeabilité.

Théorème - Croissances comparées

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\begin{aligned} \diamond (\ln x)^\alpha &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta), & x^\beta &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\gamma x}), & |\ln x|^\alpha &\underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \\ \diamond e^{\gamma n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!). \end{aligned}$$

Exemple. On a $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{x^2})$: par croissances comparées on a $\frac{\sqrt{y}}{e^y} \underset{y \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$, et $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\frac{x}{e^{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Négligeabilité et opérations

Les résultats suivants sont énoncés dans le cadre des fonctions, mais leurs analogues sont vrais pour les suites, avec des preuves dont l'adaptation est immédiate. Par ailleurs, nous choisissons dans les preuves la définition de la négligeabilité utilisant un quotient pour plus de clarté, mais tous les résultats se démontrent dans le cas général sans difficulté. Leur adaptation peut être traitée comme exercice.

Théorème - Négligeabilité et opérations

Si $f, \tilde{f}, g, \tilde{g}, h$ sont des fonctions définies sur E , on a les égalités suivantes en a .

- i. *Multiplication par un réel.* Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = o(g(x))$, alors $\lambda f(x) = o(g(x))$ et $f(x) = o(\lambda g(x))$.
- ii. *Addition.* Si $f(x) = o(g(x))$ et $\tilde{f}(x) = o(g(x))$, alors $f(x) + \tilde{f}(x) = o(g(x))$.
- iii. *Produit.* Si $f(x) = o(g(x))$ et $\tilde{f}(x) = o(\tilde{g}(x))$, alors $f(x)\tilde{f}(x) = o(g(x)\tilde{g}(x))$,
Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x)h(x) = o(g(x)h(x))$.
- iv. *Transitivité.* Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = o(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.

Démonstration.

- i. Il suffit de remarquer que si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{\lambda f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, et $\frac{f(x)}{\lambda g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$.
- ii. Si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{f(x) + \tilde{f}(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$.
- iii. Si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, alors par produit $\frac{f(x)\tilde{f}(x)}{g(x)\tilde{g}(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, et $\frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$.
- iv. Si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{g(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$, alors par produit $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$. □

Remarque. On peut alors écrire : $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$,
 $o(g(x)) o(\tilde{g}(x)) = o(g(x)\tilde{g}(x))$ et $h(x) o(g(x)) = o(g(x)h(x))$,
 $o(o(g(x))) = o(g(x))$.

Une conséquence est que si $f(x) = o(g(x))$, alors $o(f(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$.

On retiendra que lorsque plusieurs termes $o(\dots)$ cohabitent, on ne gardera que le moins fin, et on fera disparaître les termes plus fins. Par exemple,

$$x + o(x) + x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x).$$

Théorème - Changement de variable

Si $f(y) \underset{y \rightarrow b}{=} o(g(y))$ et φ est une fonction définie sur un voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ à valeurs dans I telle que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b$,

$$f(\varphi(x)) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(\varphi(x))).$$

Suites : si $u_n = o(v_n)$ et $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $u_{\varphi(n)} = o(v_{\varphi(n)})$.

Démonstration. Par composition de limite, on déduit de $\frac{f(y)}{g(y)} \underset{y \rightarrow b}{\longrightarrow} 0$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b$ que $\frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$. □

II Équivalence

1. Notion d'équivalent

Définition - Equivalence

Fonctions On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a . On dit que f est équivalente à g en a si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

On étend la définition au cas où $f(a) = g(a) = 0$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Cas général : on dit que f est équivalente à g en a s'il existe une fonction α définie sur un voisinage V de a telle que $f(x) = \alpha(x)g(x)$ pour tout $x \in V$, et $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Suites On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que (u_n) est équivalente à (v_n) en a si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On note alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Cas général : on dit que (u_n) est équivalente à (v_n) en a s'il existe une suite (α_n) telle que $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang, et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exemples.

- On a : $x^3 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$, $x^2 + 1 + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$, $e^n - n^2 + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.
- Les limites usuelles rencontrées dans le chapitre LIMITES ET CONTINUITÉ donnent des exemples d'équivalents simples :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \text{nous en verrons bien d'autres.}$$
- Une fonction polynomiale est équivalente à son terme de plus bas degré en 0 et à son terme de plus haut degré en $+\infty$: si $P = a_m X^m + a_{m+1} X^{m+1} + \dots + a_n X^n$ avec $m < n$ et $a_m, a_n \in \mathbb{K}^*$, alors

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_m x^m, \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Comme précédemment, nous choisirons de supposer que les fonctions considérées ne s'annulent pas au voisinage du point a , sauf éventuellement en a , de sorte que l'équivalence est définie avec un quotient. Le cas général se traite de manière similaire sans difficulté.

Théorème - Équivalence et convergence vers un réel non nul

Soient f une fonction réelle et $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{ssi} \quad f(x) \underset{a}{\sim} \ell.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si $\ell \neq 0$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ssi $\frac{f(x)}{\ell} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. □

Remarque. Ainsi, si f a une limite ℓ finie non nulle en un point a , on connaît un équivalent simple de f en a , il s'agit de la limite ℓ .

⚠ Si $\ell = 0$, le résultat n'est pas vrai : $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ veut dire que f est identiquement nulle sur un voisinage de a .

Théorème - Équivalence et négligeabilité

Soient f et g deux fonctions réelles. Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , sauf éventuellement en a , on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)).$$

Démonstration. On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)). \quad \square$$

Exemple. $x^2 - 3x - e^x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$, car $x^2 - 3x - 1 = o(e^x)$, par croissances comparées.

Théorème - Équivalence et comportement asymptotique

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors f et g ont soit même limite (finie ou infinie) en a , soit n'ont pas de limite en a .
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $f > 0$ sur un voisinage de a , alors $g > 0$ sur un voisinage de a .

Remarque. De même pour les suites, si $u_n \sim v_n$, alors (u_n) et (v_n) ont même limite, ou bien n'ont pas de limite, et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $v_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration.

- Si $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$.
- Soit un voisinage V de a tel que $g > 0$ sur V . Par ailleurs, comme $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$, il existe un voisinage V' de a tel que $\frac{f}{g} > 0$ sur V' . Alors $f = \frac{f}{g} g > 0$ sur $V \cap V'$. $\square$

2. Propriétés

Théorème - Relation d'équivalence

La relation d'équivalence des fonctions en un point est une relations d'équivalence. De même pour la relation d'équivalence des suites.

Démonstration. La relation est symétrique : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$, réflexive : $\frac{f(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$, et transitive : si $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{g(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$ alors $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 1$ par produit. $\square$

Théorème - Règles de calcul

Soient trois fonctions $f, g, \tilde{f}, \tilde{g}$ et h définies au voisinage de a telles que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \tilde{g}(x)$. On a :

- *Produit* : $f(x)\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)\tilde{g}(x)$.
- *Quotient* : si g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a , $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
- *Puissance* : si $n \in \mathbb{N}$, $f(x)^n \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^n$, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g > 0$ au voisinage de a , $f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^\alpha$.
- Si $h(x) = o(g(x))$, alors $h(x) = o(f(x))$.
- Si $g(x) = o(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.

Démonstration. Simples manipulation de limites. $\square$

! Il faut bien garder à l'esprit les règles suivantes.

- L'équivalence n'est pas compatible avec la somme : on ne somme pas des équivalents !

Par exemple, $x + \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $2 - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x$, mais $2 + \frac{1}{x} \not\sim 0$.

- L'équivalence n'est pas compatible avec la composition : on ne compose pas les équivalents !

Par exemple, $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, mais $e^{x+1} \not\sim e^x$, car $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$ pour tout x .

Exemple. $\frac{x^3 - e^x + 3}{x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-e^x}{x^2}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - e^x + 3}{x^2 + 1} = -\infty$.

Théorème - Changement de variable

Si $f(y) \underset{y \rightarrow b}{\sim} g(y)$ et φ est une fonction φ définie sur un voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ à valeurs dans I est telle que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$,

$$f(\varphi(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(\varphi(x)).$$

Suites : si $u_n \sim o(v_n)$ et $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

Démonstration. Simple composition de limites. □

Exemple. On déduit de l'équivalent $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ que $e^{\sqrt{x}} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x}$, car $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Théorème - Théorème d'encadrement

Si $g \leq f \leq h$ sur un voisinage de a , et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

3. Equivalents usuels

Le résultat suivant, reformulation du développement limité d'ordre 1 rencontré dans le chapitre DÉRIVABILITÉ, permet de déduire quantités d'équivalents usuels.

Théorème

Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Démonstration. On a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$. Comme $f'(a) \neq 0$, on a aussi $\frac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. □

Le résultat précédent, ainsi que les limites usuelles déjà rencontrées, permettent d'établir tous les équivalents usuels suivants, qu'il convient de connaître par cœur dès à présent.

Théorème - Équivalents usuels au voisinage de 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{array}{llll} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x. \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, & \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, & \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \\ \arccos x - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x & \operatorname{th} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. & & \end{array}$$

Exemples.

- Calcul de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$: on a $\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1$.
- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$: comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.
- Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$: par composition de limites, on a $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e$.
- Étude de la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} e^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$.

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2}.$$

On en déduit que la limite existe, et vaut $\frac{1}{2}$.

5. Déterminons la limite en 0^+ de $\frac{x^{2x}-1}{x^2}$. Comme $x^{2x} = e^{2x \ln x}$ et $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées, on a

$$\frac{x^{2x}-1}{x^2} = \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{2x \ln x}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty, \quad \text{donc} \quad \frac{x^{2x}-1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Théorème - Formule de Stirling

On a l'équivalent

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Cette formule est admise dans le cadre du programme. Nous rencontrerons toutefois plus tard une manière de montrer que $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ pour un réel K . L'étude d'intégrales de Wallis, que nous rencontrerons également, permet de montrer que $K = \sqrt{2\pi}$.

Remarque. On lit directement sur la formule : $n! = o(n^n)$.

III Développements limités

Nous cherchons ici à approcher une fonction au voisinage d'un point par une fonction polynomiale.

Lorsqu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I , on connaît déjà une approximation affine (polynomiale de degré 1) de f autour d'un point $a \in I$: il s'agit de la fonction $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ dont la courbe n'est autre que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a . On peut souhaiter affiner cette approximation en élevant le degré de la fonction polynomiale.

1. Généralités

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $a \in \bar{I}$. En d'autres termes, a est un point de I ou une extrémité finie de I .

Définition - Développement limité

On dit que f admet un *développement limité d'ordre n* en a , noté $DL_n(a)$ s'il existe des réels $b_0, \dots, b_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

On appelle *partie principale* (ou *régulière*) du $DL_n(a)$ la fonction polynomiale $x \mapsto b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n$.

Remarques.

- *Changement de variable* : par composition de limites, si on dispose d'un $DL_n(a)$ de f et si $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} a$, on déduit : $f(\varphi(x)) \underset{x \rightarrow \alpha}{=} b_0 + b_1(\varphi(x)-a) + \dots + b_n(\varphi(x)-a)^n + o((\varphi(x)-a)^n)$.
- Comme $a+h \xrightarrow{h \rightarrow 0} a$, on peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$:

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1h + \dots + b_nh^n + o(h^n).$$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donné par

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n).$$

On sait que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, on a $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n$, donc $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

Comme $\frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a bien $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$, ce qui conclut.

On déduit par changement de variable les développements limités suivants :

$$\begin{aligned} \diamond \quad \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \\ \diamond \quad \frac{1}{1+x^2} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

Théorème - Unicité du développement limité

Si f admet un $DL_n(a)$, alors il est unique.

Démonstration. Supposons que f admette deux $DL_n(a)$ distincts :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Si m est le plus petit entier tel que $b_m \neq c_m$, on a $(b_m - c_m)(x-a)^m + \dots + (b_n - c_n)(x-a)^n = o((x-a)^n)$. En divisant l'égalité par $(x-a)^m$ et en prenant la limite lorsque $x \rightarrow a$, on obtient $b_m - c_m \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, donc $b_m = c_m$. Ceci est contradictoire, d'où l'unicité du $DL_n(a)$ de f . $\square$

Théorème - DL et troncature

Si f admet un $DL_n(a)$ donné par $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors f admet un $DL_k(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_k(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

On dit que ce dernier développement limité est obtenu par troncature à partir du premier.

Démonstration. Il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{(x-a)^k} (f(x) - b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_k(x-a)^k) = b_{k+1}(x-a) + \dots + b_n(x-a)^{n-k} + o((x-a)^{n-k}) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0. \quad \square$$

Théorème - Développement limité et continuité, dérivabilité

- Si $a \in I$,
 - la fonction f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a ,
 - la fonction f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a .

Si $a \notin I$, la fonction f admet un $DL_0(a)$ (resp. un $DL_1(a)$) si et seulement si f admet un prolongement continu (resp. dérivable) en a .

Démonstration. Le cas continu est évident, le cas dérivable a déjà été démontré dans le chapitre DÉRIVABILITÉ. $\square$

Remarques.

- Si f est continue en $a \in I$, alors son $DL_0(a)$ s'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.
- Si f est dérivable en $a \in I$, alors son $DL_1(a)$ s'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.
-  Le résultat devient faux à partir de l'ordre 2 : par exemple si

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors f admet un $DL_2(0) : f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$. Par conséquent, comme $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, le théorème de la limite de la dérivée entraîne que f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

On a alors $\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$, donc $\frac{f'(x) - f'(0)}{x}$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$.

Théorème - DL et parité

On suppose que I est un intervalle centré en 0, et que f admet un $DL_n(0)$.

- Si f est paire, alors les coefficients de rang impair du $DL_n(0)$ de f sont nuls.
- Si f est impaire, alors les coefficients de rang pair du $DL_n(0)$ de f sont nuls.

Démonstration. On suppose f paire, et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$ le $DL_n(0)$ de f . On a alors

$$f(-x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 - b_1x + b_1x^2 + \dots + b_n(-x)^n + o(x^n)$$

On a aussi $f(-x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$, donc par unicité des coefficients du $DL_n(0)$, on a $b_i = -b_i$, donc $b_i = 0$ pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ impair. De même pour le cas où f est impaire. $\square$

Définition - Développement limité en $\pm\infty$

Si $+\infty$ est une extrémité de I , on dit que f admet un *développement limité d'ordre n* en $+\infty$, noté $DL_n(+\infty)$ s'il existe des réels $b_0, \dots, b_n$ tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \quad \text{et de même en } -\infty.$$

2. Primitivation des développements limités

Théorème - Primitivation d'une relation de négligeabilité

Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o((x-a)^{n+1})$.

Démonstration. On considère $x \in I$ avec $x > a$ (le cas $x < a$ est analogue). Comme f est dérivable sur $[a, x]$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x), \quad \text{donc} \quad \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f'(c_x)}{(x-a)^n} = \frac{f'(c_x)}{(c_x - a)^n} \frac{(c_x - a)^n}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

car : – comme pour tout $x > a$, on a $|c_x - a| \leq |x - a|$ donc $\left| \frac{(c_x - a)^n}{(x-a)^n} \right| \leq 1$,

– par hypothèse, $\frac{f'(x)}{(x-a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, donc $\frac{f'(c_x)}{(c_x - a)^n} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ du fait que $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$.

Ainsi, on a $f(x) - f(a) = o((x-a)^{n+1})$, ce qui conclut. $\square$

Théorème - Primitivation d'un développement limité

Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et f' admet un $DL_n(a)$ noté $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors f admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{b_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration. On applique le théorème précédent à $g : x \mapsto f(x) - b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{b_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$. On a :

$$g'(x) = f'(x) - b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n),$$

donc $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(a) + o((x-a)^{n+1}) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o((x-a)^{n+1})$, ce qui conclut. $\square$

Exemples.

- On déduit par primitivation du $DL_{n-1}(0) : \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\text{Finalement, } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- On déduit par primitivation du $DL_{2n}(0) : \frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$, comme $\arctan 0 = 0$,

$$\arctan x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

3. Formule de Taylor-Young

La formule suivante permettra d'établir tous les développements limités usuels, qui serviront de base à de nombreux calculs. Elle est bien sûr à relier à la formule de Taylor polynomiale, établie pour les polynômes, et donc pour les fonctions polynomiales.

Théorème - Formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$, et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence.

- Le cas $n = 0$ n'est autre que la continuité de f en a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$, c'est-à-dire $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} f(a)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I admet un $DL_n(a)$ comme ci-dessus. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$, de sorte que $f' \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) & \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \\ & \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \end{aligned}$$

par primitivation. On a donc bien

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) & \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \\ & \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Remarque. Nous avons supposé que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ dans le théorème ci-dessus, mais on peut remarquer en examinant la preuve que le théorème reste valable si on ne suppose que $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

Exemples.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ pour tout entier k , donc la formule de Taylor-Young entraîne que

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

- Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sin^{(2k)} = (-1)^k \sin$ et $\sin^{(2k+1)} = (-1)^k \cos$, on en déduit $\begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$. La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

- On peut obtenir un développement limité de $\tan$ terme après terme de la manière suivante.

◇ Comme $\tan x = x + o(x)$, on a $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 + o(x^2)$, donc en primitivant : $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

◇ Ainsi, $1 + \tan^2 x = 1 + x^2 \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 = 1 + x^2 \left(1 + \frac{2x^2}{3} + o(x^2)\right) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$, donc

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

4. Développements limités usuels

Théorème - Développements limités usuels en 0

On a les développements limités suivants au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\diamond \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \\
\diamond \frac{1}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \\
\diamond \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \\
\diamond e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \\
\diamond \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \\
\diamond \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \text{ et même } o(x^{2n+2}) \\
\diamond \cos x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \text{ et même } o(x^{2n+1}) \\
\diamond \arctan x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}), \\
\diamond \operatorname{sh} x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \\
\diamond \operatorname{ch} x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}), \\
\diamond \tan x &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).
\end{aligned}$$

5. Opérations sur les développements limités

Dans cette partie, on donne des méthodes pour calculer un développement limité à partir de ceux de référence.

Somme de DL. On peut sommer deux développements limités en sommant leur parties principales, et en gardant à l'esprit que si $n < m$, alors au voisinage de 0, on a $o(x^n) + o(x^m) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

Exemples.

- Déterminons le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \cos(x) + \ln(1+x)$.

$$\text{On a } \cos x + \ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + x - x^2 + o(x^2).$$

- Déterminons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$$\text{On a } \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Produit de DL. On peut faire le produit de deux DL en faisant le produit des parties principales, et en ne gardant que les puissances inférieures ou égales à l'ordre du DL.

Exemples.

- Déterminons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x(1 + \sin(x))$.

$$\text{On a } e^x(1 + \sin x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = 1 + 2x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

- Déterminons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x} \ln(1+x)$.

$$\text{On a } \sqrt{1+x} \ln(1+x) = \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) = x - \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

Remarque. On remarque que dans l'exemple précédent, il a suffi de faire un DL_2 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, du fait que le terme dominant du DL de $x \mapsto \sin x$ est x . On retiendra que pour un $DL_n(0)$:

$$\left(\begin{array}{c} x^k + \dots \\ \downarrow \end{array} \right) \underbrace{\left(\dots \right)}_{\text{ordre } n-k \text{ suffisant}}.$$

Inversement si le DL est multiplié par une puissance négative de x , il faudra prévoir un ordre plus grand. Par exemple, pour obtenir le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$, il faut effectuer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Exemple. Déterminons un $DL_7(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$.

$$(\sin x)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3) \right)^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 \left(1 - \frac{2x^2}{3} + o(x^3) \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^4 - \frac{2x^6}{3} + o(x^7).$$

Exercice 1. Déterminer un $DL_7(0)$ de $x \mapsto e^x \sin(x^2)$.

Composition de DL. On peut composer les DL, à condition que les points correspondent. On fera attention ici également à anticiper l'ordre des DL à mener, de manière à limiter les calculs. En effet, on peut souvent faire mieux que calculer un DL_n de chacune des fonctions pour obtenir un DL_n de leur composée.

Exemple. Déterminons un DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.

★ On sait que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, donc $f(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)$.

★ Par ailleurs, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$: nous allons voir que l'ordre 2 suffit ici.

On souhaite donc appliquer cette dernière formule avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, qui tend bien vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$. On voit donc qu'il n'était en effet pas nécessaire de pousser le DL de $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre 3, car $u^3 = -\frac{x^6}{8} + o(x^6) = o(x^4)$. On a ainsi

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

On a en effet retiré tous les termes du DL qui étaient négligeables devant x^4 , c'est-à-dire les termes de la forme ax^6 ou ax^8 , pour $a \in \mathbb{R}$.

DL en un autre point que 0. Il arrive qu'on ait à calculer un développement limité en un autre point a différent de 0. Dans ce cas, deux options se présentent :

- soit on se ramène à effectuer un DL en 0 en posant $x = a + h$, et en étudiant la fonction lorsque h tend vers 0 : il faut alors trouver un moyen de faire apparaître un DL usuel en h ,
- soit on trouve le développement limité en a en utilisant la formule de Taylor-Young, qui implique de dériver successivement la fonction jusqu'à l'ordre souhaité.

Exemple. Déterminons un $DL_2(2)$ de $x \mapsto \ln x$.

– *1^{ère} méthode.* On fait le changement de variable $x = 2 + h$: on cherche un $DL_2(0)$ de la fonction $h \mapsto \ln(2+h)$:

$$\ln(2+h) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{h}{2} \right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + o(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2).$$

$$\text{Alors, } \ln x \underset{x \rightarrow 2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2).$$

– 2^{ème} méthode. Si on pose $f : x \mapsto \ln x$, on a $f(2) = \ln 2$, $f'(2) = \frac{1}{2}$, $f''(2) = -\frac{1}{4}$. Au voisinage de 2, la formule Taylor-Young s'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow 2}{=} f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)\frac{(x-2)^2}{2} + o((x-2)^2)$, ce qui donne bien

$$\ln x \underset{x \rightarrow 2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + o((x-2)^2).$$

Exercice 2. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos x$ en $\frac{\pi}{2}$.

IV Domination

Définition - Domination

Fonctions On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a . On dit que f est dominée par g en a si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

On étend cette définition au cas où $f(a) = g(a) = 0$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.

Suites Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note dans ce cas $u_n = O(v_n)$.

Remarque. $\diamond u_n = O(1)$ signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$\diamond f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(1)$ signifie que f est bornée au voisinage de a .

Exemples. On a : $2n^2 - n + 3 = O(n^2)$, $5x^3 - x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^3)$, $x \cos x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x)$.

Remarque. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.

 La réciproque est fautive : on peut avoir $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ mais ni $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ ni $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.

Par exemple, on a $-x^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(x^3)$, mais $-x^3 \not\sim x^3$, et $-x^3 \neq o(x^3)$.

La notation ci-dessus s'avérera très pratique lorsqu'on souhaitera faire figurer l'ordre du terme suivant dans un développement limité sans le préciser, par exemple :

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

V Application des développements limités

1. Allure de la courbe au voisinage d'un point

Si $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$, alors on sait que le $DL_2(a)$ de f s'écrit :

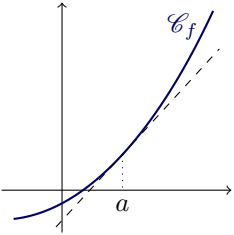
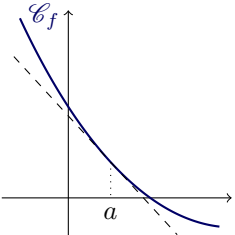
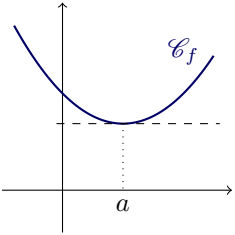
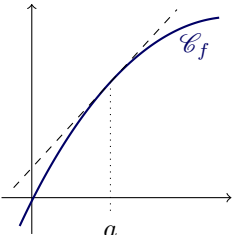
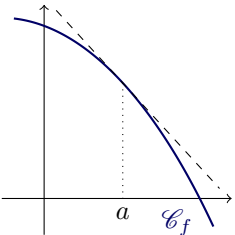
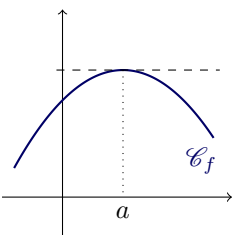
$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{équation de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } a} + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

Si $f''(a) \neq 0$, on peut déterminer la position $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente au point a à partir du signe de $f''(a)$:

- si $f''(a) > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de a (f est convexe sur un voisinage de a),
- si $f''(a) < 0$, alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de sa tangente au voisinage de a (f est concave sur un voisinage de a),

Si $f''(a) = 0$, on ne peut rien dire : la courbe $\mathcal{C}_f$ peut-être au-dessus, en-dessous de sa tangente, ou encore la traverser au point a (point d'inflexion).

En toute généralité, on connaît l'allure de la courbe de f au voisinage de a dans chacun des cas suivants.

	$f'(a) > 0$	$f'(a) < 0$	$f'(a) = 0$
$f''(a) > 0$			
$f''(a) < 0$			

On remarque en particulier que dans le cas où $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$, la fonction f atteint un extremum local au point a . C'est ce que précise le théorème suivante.

Théorème - Condition suffisante d'optimalité d'ordre 2

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est un point critique de f , c'est-à-dire que $f'(a) = 0$.

- Si $f''(a) > 0$, alors la fonction f admet un minimum local en a .
- Si $f''(a) < 0$, alors la fonction f admet un maximum local en a .

Démonstration. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$. Comme $\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 > 0$, on en déduit que $f - f(a) \geq 0$ sur un voisinage de a . $\square$

Remarque. Dans le cas où $f'(a) = 0$ et $f''(a) = 0$, on ne peut rien conclure. En effet, les trois exemples suivants correspondent à ce cas, et présentent des situations différentes :

- ★ si $f : x \mapsto x^4$, alors $f'(0) = f''(0) = 0$, et f admet un minimum local en 0,
- ★ si $f : x \mapsto -x^4$, alors $f'(0) = f''(0) = 0$, et f admet un maximum local en 0,
- ★ si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = f''(0) = 0$, et f n'admet pas d'extremum local en 0.



Recherche d'extrema locaux d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Si la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut trouver les minima et maxima locaux de la manière suivante.

- i. On recherche les points critiques c'est-à-dire les points a tels que $f'(a) = 0$.
- ii. Pour chacun de ces points a , on étudie le signe de $f''(a)$:
 - si $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local en a ,
 - si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a ,
 - si $f''(a) = 0$, on ne peut pas conclure. On peut trancher si on parvient à pousser le DL de f au voisinage de a jusqu'à trouver un terme non nul.

Remarque. Les résultats précédents sont encore valables dans le cas plus général où f admet un $DL_k(a)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_k(x-a)^k + o((x-a)^k), \text{ avec } k \geq 2 \text{ et } b_k \neq 0.$$

2. Etude des asymptotes

Si $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si

$$f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ c'est-à-dire } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} ax + b + o(1), \text{ de même en } -\infty.$$

Exemple. La courbe de $f : x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. En effet, au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - \frac{1}{2} + o(1),$$

car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. La même analyse en $-\infty$ donne que $\mathcal{C}_f$ admet la même droite pour asymptote oblique en $-\infty$.



Étude de la position relative de la courbe par rapport à une asymptote

Si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$, on fait un développement au voisinage de $\pm\infty$ de manière à déterminer un équivalent de $f(x) - (ax + b)$, et on s'intéresse au signe de cet équivalent au voisinage de $\pm\infty$.

Exemple. Si on reprend l'exemple ci-dessus, le développement que nous avons fait ne permet pas de déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote en $+\infty$, mais on peut pousser le développement à un ordre supplémentaire :

$$f(x) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = x - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{>0 \text{ au voisinage de } +\infty}.$$

Par conséquent, $f(x) - (x - \frac{1}{2}) \sim \frac{1}{3x}$, et on en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Une étude similaire au voisinage de $-\infty$ donne que $\mathcal{C}_f$ admet la même asymptote en $-\infty$. Comme $\frac{1}{3x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

