

## Chapitre 21

## Applications linéaires

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'objet de ce chapitre est l'étude des morphismes entre  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, c'est-à-dire, comme on peut s'y attendre, aux applications d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dans un autre qui préserve les opérations : addition, multiplication par un scalaire. En d'autres termes, celles qui préservent les combinaisons linéaires. On les appelle les applications linéaires.

## I Généralités

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  désignent deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## 1. Définitions

**Définition - Application linéaire**

- On dit qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est *linéaire* (ou  $f$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels) si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Autrement dit, l'image par  $f$  d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

- Si  $E = F$ , on dit que  $f$  est un *endomorphisme* de  $E$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .
- Si  $F = \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est une *forme linéaire* de  $E$ . On note parfois  $E^*$  l'ensemble  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

**Remarques.**

- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $f(0_E) = 0_F$ .
- Pour montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire, il suffit de montrer que pour tous  $x, y \in E$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ .  
Par ailleurs,  $f : E \rightarrow F$  est linéaire si et seulement si  $f$  est *additive* ( $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$ ) et *homogène* ( $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ).
- Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  n'est autre qu'un morphisme de groupe de  $(E, +)$  dans  $(F, +)$  qui est par ailleurs homogène.

**Premiers exemples d'applications linéaires**

1. L'application  $0_{\mathcal{L}(E, F)} : x \mapsto 0_F$ , dite application nulle, définit une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .
2. L'application identité  $\text{Id}_E : x \mapsto x$  définit un endomorphisme de  $E$ .
3. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'application  $\lambda \text{Id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ , appelé *homothétie de  $E$*  de rapport  $\lambda$ .
4. Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $i \in I$ , on note  $e_i^*$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  qui à un vecteur de  $x$  associe sa coordonnée selon  $e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$e_i^* : \sum_{j \in I} x_j e_j \mapsto x_i.$$

Les applications  $e_i^*$ , pour  $i \in I$ , sont des formes linéaires, appelées formes coordonnées relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

**Démonstration.** Si  $x, y \in E$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on écrit  $x = \sum_{j \in I} x_j e_j$ ,  $y = \sum_{j \in I} y_j e_j$ , donc  $\lambda x + y = \sum_{j \in I} (\lambda x_j + y_j) e_j$ .

$$e_i^*(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda e_i^*(x) + e_i^*(y). \quad \square$$

**Exemples.**

- L'application  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2y)$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

**Démonstration.** Soient  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 2(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x + y) + x' + y', \lambda(2y) + 2y') = \lambda f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

- Si  $a \in \mathbb{K}$ , l'application  $P \mapsto P(a)$ , appelée *évaluation en  $a$* , définit une forme linéaire de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Si  $A \in \mathbb{K}[X]$ , l'application  $P \mapsto AP$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Si  $Q \in \mathbb{K}[X]$ , l'application  $P \mapsto P \circ Q$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
- L'application  $P \mapsto P'$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Si  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'application  $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$  définit une forme linéaire de  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .
- Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , alors  $f \mapsto f'$  définit une application linéaire de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ . Elle définit par ailleurs un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ .

**Remarque.** Les endomorphismes de  $\mathbb{R}$  sont exactement les applications de la forme  $f : x \mapsto \lambda x$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Démonstration.** Si  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = f(x \times 1) = x f(1)$ . En posant  $\lambda = f(1)$ , on a donc bien montré que  $f = \lambda \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

Plus généralement, si  $\dim E = 1$ , alors les endomorphismes de  $E$  sont exactement les homothéties de  $E$ .

### Définition-théorème - Application linéaire associée à une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . L'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{K}^p &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

est une application linéaire, dite canoniquement associée à la matrice  $A$ . On la notera  $\varphi_A$  dans la suite.

**Démonstration.** Si  $X, Y \in \mathbb{K}^p$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\varphi_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda \varphi_A(X) + \varphi_A(Y)$ .  $\square$

**Exemples.**

- L'application  $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \end{pmatrix}$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- On peut voir  $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2y)$  rencontrée plus haut comme l'application linéaire associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** On rappelle l'identification que l'on fait entre  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , noté  $\mathbb{K}^n$  ici. Ceci permet de voir l'application du second exemple ci-dessus comme une application de  $\mathbb{K}^2$  dans  $\mathbb{K}^2$ .

### Théorème

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , alors  $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$ .

**Démonstration.** Pour tout  $X \in \mathbb{K}^q$ , on a  $\varphi_A \circ \varphi_B(X) = \varphi_A(\varphi_B(X)) = \varphi_A(BX) = ABX = \varphi_{AB}(X)$ .  $\square$

### Définition - Isomorphisme, automorphisme, espaces vectoriels isomorphes

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est bijective, on dit que  $f$  est un *isomorphisme* de  $E$  dans  $F$ . On dit alors que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

On appelle *automorphisme* de  $E$  un isomorphisme de  $E$  dans  $E$ . On note  $\text{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

**Exemples.**

- L'application  $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

L'application  $f$  est linéaire :  $f$  est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Elle est par ailleurs bijective, de bijection réciproque  $(u, v) \mapsto (\frac{1}{2}(u + v), \frac{1}{2}(u - v))$ .

- L'application  $(a, b, c) \mapsto aX^2 + bX + c$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^3$  dans  $\mathbb{K}_2[X]$ .
- Si  $a, b \in \mathbb{K}$  et si on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ , alors  $u \mapsto (u_0, u_1)$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{K}^2$ .

## 2. Opérations sur les applications linéaires

### Théorème - L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

$\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. En particulier, toute combinaison linéaire d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est une application linéaire.

**Démonstration.** Montrons que  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, F)$ . La fonction nulle de  $E$  dans  $F$  est clairement linéaire, et pour tous  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ , on a  $\alpha f + g \in \mathcal{L}(E, F)$  : en effet, si  $x, y \in E$  et  $\lambda \in K$ , alors

$$(\alpha f + g)(\lambda x + y) = \alpha f(\lambda x + y) + g(\lambda x + y) = \alpha(\lambda f(x) + f(y)) + \lambda g(x) + g(y) = \lambda(\alpha f + g)(x) + (\alpha f + g)(y). \quad \square$$

**Exemple.** L'application  $f : P \mapsto 2P(0) + 3XP(X)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ . En effet  $f = 2\varphi + 3\psi$  avec  $\varphi : P \mapsto P(0)$  et  $\psi : P \mapsto XP$ , et on sait que  $\varphi$  et  $\psi$  sont linéaires.

### Théorème - Réciproque

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

**Démonstration.** Soient  $y, y' \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $x = f^{-1}(y)$  et  $x' = f^{-1}(y')$ . Comme  $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x')$ , on a  $f^{-1}(\lambda f(x) + f(x')) = \lambda x + x'$ , c'est-à-dire  $f^{-1}(\lambda y + y') = \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y')$ .  $\square$

### Théorème - Composition

Si  $E, F, G$  sont trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Si de plus  $f$  et  $g$  sont des isomorphismes, alors  $g \circ f$  est un isomorphisme, et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Démonstration.** Soient  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y))$ , ce qui entraîne que  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ . Le deuxième point découle du fait qu'une composée de fonctions bijectives est bijective.  $\square$

**Exemple.** L'application  $\varphi : P \mapsto P'(X^2)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$ .

On a  $\varphi = g \circ f$ , où  $f : P \mapsto P'$  et  $g : P \mapsto P(X^2)$ . Comme  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\varphi$  l'est également.

**Remarque.** Si  $E, F, G$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, on remarque que si  $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g, \tilde{g} \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors

$$\begin{aligned} i. (f + \tilde{f}) \circ g &= f \circ g + \tilde{f} \circ g & \text{et} & & (\lambda f) \circ g &= \lambda f \circ g, \\ ii. f \circ (g + \tilde{g}) &= f \circ g + f \circ \tilde{g} & \text{et} & & f \circ (\lambda g) &= \lambda f \circ g. \end{aligned}$$

Il convient de bien noter que le point *i.* est toujours vrai, alors que le point *ii.* repose sur la linéarité des applications. Dans le cas où  $E = F = G$ , cette remarque permet d'obtenir le résultat suivant.

### Théorème - Anneau $\mathcal{L}(E)$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau, dont le groupe des inversibles est  $\text{GL}(E)$ . Par conséquent,  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Démonstration.** On sait que  $(\mathcal{L}(E), +)$  est un groupe abélien. Par ailleurs,  $\mathcal{L}(E)$  est stable par  $\circ$ , et la loi  $\circ$  est associative, distributive par rapport à  $+$  d'après la remarque ci-dessus, et admet  $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$  pour élément neutre, donc  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est bien un anneau. Par ailleurs,  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda g \circ f$  toujours par la remarque précédente, donc  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.  $\square$

**Remarque.** On a souvent recours à la notation multiplicative habituelle dans la manipulation des anneaux, ce qui nous amène à noter  $fg$  l'application  $f \circ g$ . De même, on note  $f^n$  l'application  $f \circ \dots \circ f$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les applications obtenues sont appelées les puissances de l'endomorphisme  $f$ .

**Puissances d'un endomorphisme.** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et } f^0 = \text{Id}_E.$$

⚠ Attention à ne pas confondre cette opération avec le produit dans  $\mathbb{K}$  : si  $x \in \mathbb{K}$ ,  $f^n(x) \neq (f(x))^n$ , et cette dernière expression n'a d'ailleurs pas de sens en général.

**Exemple.** Si  $f : P \mapsto P'$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $f^n(P) = P^{(n)}$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

**Remarque.**  $\mathcal{L}(E)$  ayant une structure d'anneaux, on sait que si  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  commutent (i.e.  $fg = gf$ ), alors les formules du binôme de Newton et de Bernoulli s'appliquent : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k}, \quad \text{et} \quad f^n - g^n = \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}.$$

À nouveau, on prendra garde au fait que  $f^k g^{n-k}$  désigne ici  $f^k \circ g^{n-k}$ .

**Exercice 1.** Montrer que  $\varphi : (x, y) \mapsto (2x + y, 2y)$  définit un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

*Solution.* On pose  $f = 2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  et  $g : (x, y) \mapsto (y, 0)$ . Ainsi,  $\varphi = f + g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . On note que  $f^k = 2^k \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par ailleurs, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $g^2(x, y) = g(y, 0) = (0, 0)$ , ce qui entraîne que  $g^k$  est l'application nulle dès que  $k \geq 2$ . Comme  $2 \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  commute avec  $g$ , on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \varphi^n(x, y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} g^k(x, y) = \binom{n}{0} f^n g^0(x, y) + \binom{n}{1} f^{n-1} g(x, y) \\ &= 2^n(x, y) + n 2^{n-1}(y, 0) = (2^n x + n 2^{n-1} y, 2^n y). \end{aligned}$$

### 3. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

#### Théorème - Image, image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- L'image  $f(G)$  d'un sous-espace vectoriel  $G$  de  $E$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- L'image réciproque  $f^{-1}(H)$  d'un sous-espace vectoriel  $H$  de  $F$  par  $f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

#### Démonstration.

- On a  $f(G) \subset F$  et  $f(0_E) = 0_F$ , donc  $0_F \in f(G)$  car  $0_E \in G$ . Par ailleurs, si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $y, y' \in f(G)$ , il existe  $x, x' \in G$  tels que  $y = f(x)$  et  $y' = f(x')$ , donc  $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda y + y'$ , ce qui entraîne que  $\lambda y + y' \in f(G)$ , car,  $G$  étant un sous-espace vectoriel,  $\lambda x + x' \in G$ .
- On a  $f^{-1}(H) \subset E$ , et comme  $f(0_E) = 0_F \in H$ , on a  $0_E \in f^{-1}(H)$ . Par ailleurs, si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x, x' \in f^{-1}(H)$ , alors  $f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') \in H$  car  $f(x), f(x') \in H$ .  $\square$

#### Définition - Noyau et image d'une application linéaire

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- On appelle *noyau* de  $f$ , noté  $\text{Ker } f$ , l'ensemble des antécédents de  $0_F$  par  $f$ . Autrement dit,

$$\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}.$$

- On appelle *image* de  $f$ , notée  $\text{Im } f$ , l'ensemble des images des éléments de  $E$  par  $f$ . Autrement dit,

$$\text{Im } f = f(E) = \{f(u), u \in E\} = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\}.$$

**Remarque.** D'après le théorème ci-dessus, si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Ker } f$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\text{Im } f$  un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Exemples.**

1. Soit  $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X], \mathbb{K}_1[X])$  définie par  $\psi : P \mapsto P'$ .
  - On a  $\text{Ker } \psi = \{P \in \mathbb{K}_2[X], P' = 0_{\mathbb{K}[X]}\} = \mathbb{K}_0[X]$ .
  - Par ailleurs  $\text{Im } \psi = \mathbb{K}_1[X]$  : on sait que  $\text{Im } \psi \subset \mathbb{K}_1[X]$  et si  $Q = aX + b \in \mathbb{K}_1[X]$ , alors  $\psi(a\frac{X^2}{2} + bX) = Q$ , donc  $Q \in \text{Im } \psi$ . Par conséquent,  $\text{Im } \psi = \mathbb{K}_1[X]$ .
2. Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K})$  définie par  $\Phi : P \mapsto P(1)$ .
  - On a  $\text{Ker } \Phi = \{P \in \mathbb{K}[X], P(1) = 0\} = \{(X-1)Q, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ .
  - Pour tout  $a \in \mathbb{K}$ , on a  $\Phi(P) = a$  où  $P$  est le polynôme constant égal à  $a$ . On en déduit que  $\text{Im } \Phi = \mathbb{K}$ .
3. Soit  $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  définie par  $\Psi : M \mapsto M - M^\top$ .
  - On a  $\text{Ker } \Psi = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ .
  - Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $M - M^\top \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , donc  $\text{Im } \Psi \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Par ailleurs, si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top) = \frac{1}{2}(A - A^\top)$ , donc  $A = \Psi(\frac{1}{2}A)$ . Ainsi,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \subset \text{Im } \Psi$ , et finalement  $\text{Im } \Psi = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 2.** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f : (x, y, z) \mapsto (-x + 3y, 2x - 2y - 2z, -x - y + 2z)$ . Donner une base de  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$ .

**Théorème - Image d'une application linéaire et famille génératrice**

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $X \subset E$ , alors  $f(\text{Vect}(X)) = \text{Vect}(f(X))$ . En particulier, si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$ , alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(x_i))_{i \in I}.$$

**Démonstration.** Si  $y \in f(\text{Vect}(X))$ , alors  $y$  s'écrit  $y = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)$  où  $x_1, \dots, x_n \in X$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Ainsi, par linéarité de  $f$ , on a  $y = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \in \text{Vect}(f(X))$ , donc  $f(\text{Vect}(X)) \subset \text{Vect}(f(X))$ .

Si  $y \in \text{Vect}(f(X))$ , alors  $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$  où  $y_1, \dots, y_n \in f(X)$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Pour tout  $i$ , il existe  $x_i \in X$  tel que  $y_i = f(x_i)$ , donc  $y = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \in f(\text{Vect}(X))$ , d'où l'autre inclusion.

Si  $(x_i)_{i \in I}$  engendre  $E$ , alors  $\text{Im } f = f(E) = f(\text{Vect}(x_i)_{i \in I}) = \text{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$  □

**Exemples.** On reprend deux des exemples ci-dessus, pour retrouver les images des applications linéaires.

1. Si  $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X], \mathbb{K}_1[X])$  est définie par  $\psi : P \mapsto P'$ , comme  $(1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ ,

$$\text{Im } \psi = \text{Vect}(\psi(1), \psi(X), \psi(X^2)) = \text{Vect}(0, 1, 2X) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{K}_1[X].$$

2. Si  $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$  est définie par  $\Psi : M \mapsto M - M^\top$ , comme  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  est une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\text{Im } \Psi = \text{Vect}(\psi(E_{i,j}))_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Vect}(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i, j \leq n} = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

car les matrices  $E_{i,j} - E_{j,i}$  sont toutes dans  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , et  $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i, j \leq n}$  contient la base canonique de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème - Caractérisation de l'injectivité ou de la surjectivité d'une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .
- $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .

**Démonstration.**

- Supposons que  $f$  est injective. Comme on sait que  $f(0_E) = 0_F$ , l'injectivité implique que  $0_E$  est le seul antécédent de  $0_F$  par  $f$ , c'est-à-dire que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ .

Supposons que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . Si  $x, y \in E$  vérifient  $f(x) = f(y)$ , alors par linéarité on a  $f(x - y) = 0_F$ , c'est-à-dire  $x - y \in \text{Ker } f$ . Ainsi,  $x - y = 0_E$ , donc  $x = y$ . On a bien montré que  $f$  est injective.

- ii. L'application  $f$  est surjective si et seulement si tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent par  $f$ , c'est-à-dire appartient à  $\text{Im } f$ . Ceci s'écrit  $F \subset \text{Im } f$ . Comme  $\text{Im } f \subset F$ , on a le résultat.  $\square$

### Remarques.

- Nous avons en fait déjà démontré ce résultat : une application de  $\mathcal{L}(E, F)$  est en particulier un morphisme de groupe de  $(E, +)$  dans  $(F, +)$ , donc il s'agit d'une conséquence du résultat sur les morphismes de groupe.
- Pour montrer que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, il suffit de montrer que  $\text{Ker } f \subset \{0_E\}$ , car on a toujours  $\{0_E\} \subset \text{Ker } f$ . Pour montrer que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est surjective, il suffit de montrer que  $F \subset \text{Im } f$ , car on a toujours  $\text{Im } f \subset F$ .
- Le critère de surjectivité est vrai pour toute application, il n'utilise pas la linéarité.

**!** Le critère pour l'injectivité n'est en revanche vrai que pour des applications linéaires.

### Définition - Noyau et image d'une matrice

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\varphi_A : X \mapsto AX$  l'application linéaire de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}^p$  qui lui est associée. On appelle :

- *noyau* de  $A$ , noté  $\text{Ker } A$ , le noyau de  $\varphi_A : \text{Ker } A = \{X \in \mathbb{K}^n, AX = 0_n\}$ ,
- *image* de  $A$ , notée  $\text{Im } A$ , l'image de  $\varphi_A : \text{Im } A = \{AX, X \in \mathbb{K}^n\}$ .

**Remarque.** Nous avons déjà rencontré cette même définition du noyau d'une matrice dans le chapitre MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES :  $\text{Ker } A$  n'est autre que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à  $A$ .

### Théorème - Image d'une matrice et colonnes

Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $C_1, \dots, C_p$  désignent les colonnes de  $A$ , alors  $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .

**Démonstration.** Si on note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^p$ , On a

$$\text{Im } A = \text{Vect}(\varphi_A(e_1), \dots, \varphi_A(e_p)) = \text{Vect}(Ae_1, \dots, Ae_p) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p). \quad \square$$

**Exemple.** On a  $\text{Im} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

## 4. Détermination d'une application linéaire

Le résultat ci-dessous exprime qu'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est entièrement déterminée par l'image d'une base de  $E$ .

### Théorème - Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(e'_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $f(e_i) = e'_i$ .

**Démonstration.** *Analyse.* Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est telle que pour tout  $i \in I$ ,  $f(e_i) = e'_i$ , alors pour tout  $x = \sum_{i \in I} a_i e_i \in E$ ,

$$f(x) = f \left( \sum_{i \in I} a_i e_i \right) = \sum_{i \in I} a_i f(e_i) = \sum_{i \in I} a_i e'_i,$$

par linéarité de  $f$ . Ceci prouve l'unicité de  $f$  :  $f$  est nécessairement l'application  $f : x = \sum_{i \in I} a_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} a_i e'_i$ .

*Synthèse.* Si  $f$  est l'application ci-dessus, soient  $x, y \in E$  avec  $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$ ,  $y = \sum_{i \in I} b_i e_i$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

$$f(\lambda x + y) = f \left( \sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) e_i \right) = \sum_{i \in I} (\lambda a_i + b_i) e'_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i e'_i + \sum_{i \in I} b_i e'_i = \lambda f(x) + f(y),$$

donc  $f$  est bien linéaire et vérifie clairement  $f(e_i) = e'_i$  pour tout  $i \in I$ , ce qui donne l'existence.  $\square$

**Remarque.** Par conséquent, on retiendra que deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  qui coïncident sur une base de  $E$  sont identiques.

**Exemple.** Soit  $f$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f(e_1) = (2, 3)$  et  $f(e_2) = (1, 2)$ , où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Déterminons  $f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = (2x + y, 3x + 2y).$$

### Théorème - Caractérisation d'une application linéaire par ses restrictions à des s.e.v. supplémentaires

Soient  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , et  $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ ,  $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ .

**Démonstration.** Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ , alors pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ . La linéarité donne alors  $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ . Ceci donne l'unicité :  $f$  est nécessairement l'application  $f : x \mapsto f_1(x_1) + f_2(x_2)$ , où  $x = x_1 + x_2$  est l'unique écriture telle que  $x_1 \in E_1$  et  $x_2 \in E_2$ .

Il reste à montrer que l'application  $f$  ci-dessus est linéaire et telle que  $f|_{E_1} = f_1$  et  $f|_{E_2} = f_2$ .

- Si  $x \in E_1$ , alors  $x_1 = x$  et  $x_2 = 0_E$ , donc  $f(x) = f_1(x) + f_2(0_E) = f_1(x)$ , donc  $f|_{E_1} = f_1$ . Un argument similaire donne  $f|_{E_2} = f_2$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x, y \in E$ , on écrit  $x = x_1 + x_2$  et  $y = y_1 + y_2$  avec  $x_1, y_1 \in E_1$  et  $x_2, y_2 \in E_2$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= f(\lambda x_1 + y_1 + \lambda x_2 + y_2) = f_1(\lambda x_1 + y_1) + f_2(\lambda x_2 + y_2) = \lambda f_1(x_1) + f_1(y_1) + \lambda f_2(x_2) + f_2(y_2) \\ &= \lambda(f_1(x_1) + f_2(x_2)) + f_1(y_1) + f_2(y_2) = \lambda f(x) + f(y). \end{aligned} \quad \square$$

### Théorème - Injectivité, surjectivité et image d'une base

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Alors,

- i.  $f$  est surjective si et seulement si  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $F$ ,
- ii.  $f$  est injective si et seulement si  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille libre.

Ainsi,  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  si et seulement si  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .

### Démonstration.

- i. Comme  $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$ ,  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Vect}(f(e_i))_{i \in I} = F$ , c'est-à-dire que  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $F$ .
- ii. Si  $f$  est injective, on déduit de l'égalité  $\text{Ker } f = \{0_E\}$  que  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre :

si  $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_E$ , alors  $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_E$ , donc  $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$ , donc  $\forall i \in I, \lambda_i = 0$  par liberté de  $(e_i)_{i \in I}$ .

Si maintenant  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre, montrons que  $\text{Ker } f = \{0_E\}$ . Si  $x \in \text{Ker } f$ , alors

$x$  s'écrit  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ , et comme  $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_E$ , on a  $\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_E$  donc  $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ , puis  $x = 0_E$ .

par liberté de la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$ . □

### Corollaire - Espaces isomorphes et dimension

Si  $E$  est de dimension finie, alors

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow F \text{ est de dimension finie et } \dim E = \dim F.$$

En particulier, si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

**Démonstration.** On considère une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

- S'il existe un isomorphisme  $f$  de  $E$  dans  $F$ , on sait que  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ , donc  $F$  est de dimension finie, et  $\dim F = n = \dim E$ .
- Si  $\dim E = \dim F$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  est une base de  $F$ , alors l'unique application linéaire  $f$  telle que  $f(e_i) = e'_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est un isomorphisme, d'après le théorème ci-dessus □

**Théorème - Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  en dimension finie**

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, et  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \dim F$ .

**Démonstration.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On considère l'application  $\Phi : f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$ , qui est clairement linéaire de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $F^n$ .

D'après la caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base, on sait que pour tout  $(e'_1, \dots, e'_n) \in F^n$ , il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $f(e_i) = e'_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En d'autres termes,  $\Phi$  est bijective. On en déduit alors que  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = n \dim F = \dim E \dim F$ .  $\square$

**5. Rang d'une application linéaire****Définition - Rang d'une application linéaire**

On dit que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est de *rang fini* si  $\text{Im } f$  est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle *rang* de  $f$  la dimension de  $\text{Im } f$ . On note alors  $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$ .

**Remarques.**

- Si  $E$  est de dimension finie : si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $f$  est de rang fini et
 
$$\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p)),$$
 en particulier,  $\text{rg } f \leq \dim E$ .  
 Si  $F$  est de dimension finie : on a clairement  $f$  de rang fini, et  $\text{rg } f \leq \dim F$ .
- Ainsi, si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $f$  est de rang fini et  $\text{rg } f \leq \min(\dim E, \dim F)$ .

**Exemples.**

1. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  définie par  $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, y + z, 3x + y + 4z)$ . On a

$$\begin{aligned} \text{rg } f &= \text{rg}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{rg}((1, 0, 3), (1, 1, 1), (2, 1, 4)) = \text{rg}((1, 0, 3), (0, 1, -2), (0, 1, -2)) \\ &= \text{rg}((1, 0, 3), (0, 1, -2)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{rg } f = 2$  car la famille  $((1, 0, 3), (0, 1, -2))$  est libre.

2. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$  définie par  $f : P \mapsto XP'(X)$ . On a

$$\begin{aligned} \text{rg } f &= \text{rg}(f(X^n), f(X^{n-1}), \dots, f(X^2), f(X), f(1)) = \text{rg}(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X, 0) \\ &= \text{rg}(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{rg } f = n$  car la famille  $(nX^n, (n-1)X^{n-1}, \dots, 2X^2, X)$ , échelonnée en degré, est libre.

**Théorème - Rang et injectivité, surjectivité**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- i. Si  $E$  est de dimension finie,  $f$  est injective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim E$ .
- ii. Si  $F$  est de dimension finie,  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{rg } f = \dim F$ .

**Démonstration.**

- i. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$ , on sait que  $f$  est injective si et seulement si  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est libre, c'est-à-dire  $\text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = p = \dim E$ .
- ii. On sait que  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ , ce qui équivaut à  $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim F$ .  $\square$

**Théorème**

Si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie et  $\dim E = \dim F$ , alors pour toute application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est un isomorphisme.}$$

**Démonstration.** On a :  $f$  est injective  $\Leftrightarrow \text{rg } f = \dim E \Leftrightarrow \text{rg } f = \dim F \Leftrightarrow f$  est surjective.  $\square$

**Remarque.** En particulier, si  $E$  est de dimension finie, un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  est un automorphisme si et seulement si  $f$  est injectif ou surjectif.

**Exemple.** L'endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$  défini par  $f : P \mapsto P(X+1) + P(X)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $f(P) = P(X+1) + P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ . On suppose que  $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ , on note  $d = \deg P$  et  $a_d = \text{c}_d[P]$ . On a alors  $\text{c}_d[f(P)] = 2a_d$ , donc  $a_d = 0$ , et il y a contradiction. Ainsi,  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ .

Ainsi,  $f$  est un endomorphisme injectif, donc un isomorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Exemple.** Soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ . L'application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1})$  définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En effet, il est aisé de voir que  $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$  : si  $f(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ , alors le polynôme  $P$  est de degré au plus  $n$  et a  $a_0, \dots, a_n$  pour racines, soit  $n+1$  racines distinctes, il est donc nul.

On retrouve un résultat connu : si  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que  $P(a_i) = y_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , il s'agit du polynôme obtenu par interpolation de Lagrange.

### Corollaire - Inversibilité à gauche, à droite

Si  $E$  est de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $f \in \text{GL}(E) \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = \text{Id}_E \Leftrightarrow \exists g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = \text{Id}_E$ .

**Remarque.** En dimension finie, il suffit donc de vérifier que  $f \in \mathcal{L}(E)$  est inversible à gauche, ou à droite, pour vérifier que  $f$  est un automorphisme. Attention, c'est faux en dimension infinie.

**Démonstration.** Si  $g \in \mathcal{L}(E)$  est telle que  $f \circ g = \text{Id}_E$ , alors  $f \circ g$  est surjective, donc  $f$  est surjective, et  $f \in \text{GL}(E)$ . Par ailleurs, si  $g \in \mathcal{L}(E)$  est telle que  $g \circ f = \text{Id}_E$ , alors  $g \circ f$  est injective, donc  $f$  est injective, et  $g \in \text{GL}(E)$ .  $\square$

## 6. Théorème du rang

### Théorème - Théorème du rang, forme géométrique

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On suppose que  $G$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ . Alors,  $f|_G$  est un isomorphisme de  $G$  dans  $\text{Im } f$ .

**Démonstration.** L'application  $f|_G$  est linéaire car  $f$  l'est, donc  $f|_G \in \mathcal{L}(G, \text{Im } f)$ .

- On a  $\text{Ker } f|_G = G \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$  car  $G$  et  $\text{Ker } f$  sont en somme directe, donc  $f|_G$  est injective.
- Si  $y \in \text{Im } f$ , on considère  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ , et on écrit  $x = x_1 + x_2$  où  $x_1 \in \text{Ker } f$  et  $x_2 \in G$ , on a alors  $y = f(x) = f(x_2) = f|_G(x_2)$ . Ainsi,  $f|_G$  est surjective.  $\square$

### Théorème - Théorème du rang

Si  $E$  est de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$

**Démonstration.** On sait que  $\text{Ker } f$  admet un supplémentaire  $G$  dans  $E$  qui est de dimension finie. D'après le théorème précédent,  $G$  et  $\text{Im } f$  sont isomorphes. Ainsi,  $\text{Im } f$  est de dimension finie, et  $\dim \text{Im } f = \dim G$ . Ceci conclut car comme  $E = \text{Ker } f \oplus G$ , on a  $\dim G = \dim E - \dim \text{Ker } f$ , donc  $\text{rg } f = \dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f$ .  $\square$

**Remarque.** On notera bien que rien n'est supposé sur l'espace d'arrivée, la formule ci-dessus est donc valable lorsque  $F$  est de dimension infinie.



### Calcul du rang d'une application linéaire

Pour déterminer le rang d'une application linéaire, on peut aussi déterminer la dimension du noyau et utiliser le

I théorème du rang.

**Exemple.** Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$  est définie par  $f : P \mapsto P''$ , alors

$$\ker f = \mathbb{K}_1[X], \text{ donc } \operatorname{rg} f = \dim \mathbb{K}_n[X] - \dim \operatorname{Ker} f = n + 1 - 2 = n - 1.$$

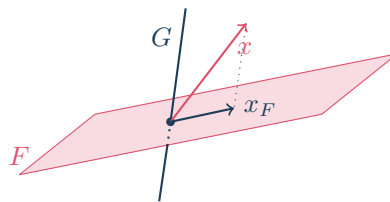
## II Projecteurs, symétries

### 1. Projecteurs

Dans la suite  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On rappelle que si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , tout vecteur  $x \in E$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_F + x_G, \quad \text{où } x_F \in F, \quad x_G \in G.$$

Nous allons introduire la notion de projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  comme l'application qui à tout vecteur  $x \in E$  associe sa "composante en  $F$ " donnée par  $x_F$ . Dans toute la suite, nous utiliserons les notations ci-dessus.



#### Définition - Projecteur

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , on appelle *projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$*  l'application

$$\begin{aligned} p : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_F \end{aligned}$$

L'application  $q : x \mapsto x_G$  définit alors un autre projecteur, et on dit que  $p$  et  $q$  sont des projecteurs associés.

#### Exemples.

- Si  $u_1 = (1, 0)$  et  $u_2 = (1, 1)$ , alors  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , donc  $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$  où  $F = \operatorname{Vect}(u_1)$  et  $G = \operatorname{Vect}(u_2)$ . Comme pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la décomposition de  $(x, y)$  est donnée par  $(x, y) = (x - y)u_1 + y u_2$ , donc le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  est

$$p : (x, y) \mapsto (x - y, 0)$$

- Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , on rappelle que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Plus précisément, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $M = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top)$ , avec  $\frac{1}{2}(M + M^\top) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\frac{1}{2}(M - M^\top) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Par conséquent, le projecteur sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  parallèlement à  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  est :

$$p : M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^\top).$$

#### Remarques.

- Si  $E = F \oplus G$  et  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $\begin{cases} p(x) = x & \text{pour tout } x \in F, \\ p(x) = 0_E & \text{pour tout } x \in G. \end{cases}$
- Si de plus  $q$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ , alors :

$$p + q = \operatorname{Id}_E, \quad \text{et} \quad pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

#### Théorème - Propriétés des projecteurs

Si  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , et  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . Alors,

- l'application  $p$  est un endomorphisme de  $E$ , et  $p^2 = p$ ,
- on a  $F = \operatorname{Im} p$  et  $G = \operatorname{Ker} p$ .

**Démonstration.**

- (i) Soient  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a  $\lambda x + y = \lambda x_F + y_F + \lambda x_G + y_G$ . Comme  $\lambda x_F + x_F \in F$ , et  $\lambda y_G + y_G \in G$ , on a  $p(\lambda x + y) = \lambda x_F + y_F = \lambda p(x) + p(y)$ , et  $p \in \mathcal{L}(E)$ .  
Par ailleurs, pour tout  $x \in E$ , alors  $p^2(x) = p(x_F) = x_F = p(x)$ , donc  $p^2 = p$ .
- (ii) On a clairement  $\text{Im } p \subset F$ , puis pour tout  $x \in F$ , comme  $p(x) = x$ , on a  $x \in \text{Im } p$ . Ceci donne  $F = \text{Im } p$ .  
Si  $x = x_F + x_G \in E$ , toujours avec les mêmes notations, on a  $p(x) = 0_E \Leftrightarrow x_F = 0_E \Leftrightarrow x = x_G \Leftrightarrow x \in G$ .  $\square$

**Remarque.** Si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur, alors :

- ◊  $p$  est toujours un projecteur sur  $\text{Im } p$ , parallèlement à  $\text{Ker } p$ .
- ◊ on a toujours  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ .

**Théorème - Caractérisation des projecteurs**

Si  $p \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $p$  est un projecteur de  $E$  si et seulement si  $p^2 = p$ .

**Démonstration.** On a déjà vu qu'un projecteur  $p$  vérifie  $p^2 = p$ . On considère maintenant  $p \in \mathcal{L}(E)$  et on suppose que  $p^2 = p$ . Montrons que  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ .

- Si  $y \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$ , alors  $p(y) = 0_E$ , et il existe  $x \in E$  tel que  $y = p(x)$ . On a  $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ , donc  $y = 0_E$ . On a donc  $\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0_E\}$ .
- Pour tout  $x \in E$ , on a  $x = p(x) + (x - p(x))$ . Comme  $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0_E$ , on a  $x - p(x) \in \text{Ker } p$ . Par ailleurs, on a bien sûr  $p(x) \in \text{Im } p$ , donc  $x \in \text{Im } p + \text{Ker } p$ . Finalement,  $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$ .

Pour tout  $x \in E$ , d'après la décomposition  $x = p(x) + (x - p(x))$  dans  $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ , le projecteur sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$  est donné par  $x \mapsto p(x)$  : il s'agit de l'application  $p$ .  $\square$

**Montrer qu'une application est un projecteur**

Pour montrer que  $p$  est un projecteur, on vérifie que  $p$  est linéaire et que  $p^2 = p$ . On aura alors montré que  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im } p$ , parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

**Exercice 3.** Montrer que l'application

$$p : (x, y) \mapsto \left(\frac{2}{3}(x + y), \frac{1}{3}(x + y)\right)$$

est un projecteur de  $\mathbb{R}^2$ , et préciser les sous-espaces vectoriels supplémentaires associés.

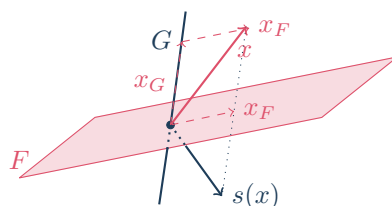
**2. Symétries**

Dans ce paragraphe, nous conservons les mêmes notations que ci-dessus : si  $E = F \oplus G$  et  $x \in E$ , on écrira  $x = x_F + x_G$  l'unique décomposition de  $x$  telle que  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

**Définition - Symétrie**

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , on appelle *symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$*  l'application

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$



**Théorème - Propriétés des symétries**

Si  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ , et  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ . Alors,

- (i) l'application  $s$  est un endomorphisme de  $E$ , et  $s^2 = \text{Id}_E$ ,
- (ii) on a  $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

**Remarque.** On remarque que  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{x \in E, s(x) = x\}$  : il s'agit des vecteurs de  $E$  laissés invariants par  $s$ . Par ailleurs,  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{x \in E, s(x) = -x\}$  : il s'agit des vecteurs de  $E$  transformés en leur opposé par  $s$ .

**Démonstration.**

- (i) On montre que  $s \in \mathcal{L}(E)$  comme pour les projecteurs. On voit que  $s^2 = \text{Id}_E$  en remarquant que si  $x \in E$ , alors  $s^2(x) = s(s(x_F + x_G)) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$ .
- (ii) Si  $x \in E$ , on a :  $x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(x) = x \Leftrightarrow x_F - x_G = x_F + x_G \Leftrightarrow x_G = 0_E \Leftrightarrow x \in F$ , donc on a montré  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ . L'autre égalité se prouve de même.  $\square$

**Remarque.** Si  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie, alors :

- ◇  $s$  est toujours la symétrie sur  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ , parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .
- ◇ on a toujours  $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

**Théorème - Caractérisation des symétries**

Si  $s \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $s$  est une symétrie de  $E$  si et seulement si  $s^2 = \text{Id}_E$ .

**Démonstration.** On a déjà vu que si  $s$  est une symétrie de  $E$ , alors  $s^2 = \text{Id}_E$ . Réciproquement, si  $s^2 = \text{Id}_E$ , on pose  $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  et  $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ . Montrons que  $E = F \oplus G$ .

- Soit  $x \in F \cap G$ . On a alors  $s(x) = x$  et  $s(x) = -x$ , donc  $x = -x$ , et  $x = 0_E$ . Finalement,  $F \cap G = \{0_E\}$ .
- Soit  $x \in E$ . On pose  $x_F = \frac{1}{2}(x + s(x))$  et  $x_G = \frac{1}{2}(x - s(x))$ , de sorte que  $x = x_F + x_G$ . Par ailleurs, on a

$$s(x_F) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = x_F, \quad \text{et} \quad s(x_G) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -x_G,$$

donc  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . On donc montré que  $E = F + G$ .

Finalement, pour tout  $x \in E$ , on a  $s(x) = s(x_F + x_G) = s(x_F) + s(x_G) = x_F - x_G$ , donc  $s$  est la symétrie sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  $\square$

**Théorème - Lien projecteurs-symétries**

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  et  $s, p \in \mathcal{L}(E)$  vérifient  $s = 2p - \text{Id}_E$ , alors

$$p \text{ est le projecteur sur } F \text{ parallèlement à } G \Leftrightarrow s \text{ est la symétrie sur } F \text{ parallèlement à } G.$$

**Démonstration.** On remarque déjà que :  $s^2 = \text{Id}_E \Leftrightarrow (2p - \text{Id}_E)^2 = \text{Id}_E \Leftrightarrow 4p^2 - 4p + \text{Id}_E = \text{Id}_E \Leftrightarrow p^2 = p$ , car  $2p$  et  $\text{Id}_E$  commutent, donc  $s$  est une symétrie si et seulement si  $p$  est un projecteur.

Par ailleurs, dans ce cas,

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) &\Leftrightarrow s(x) = x \Leftrightarrow 2p(x) - x = x \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow x \in \text{Im } p \\ x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) &\Leftrightarrow s(x) = -x \Leftrightarrow 2p(x) - x = -x \Leftrightarrow p(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in \text{Ker } p. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \text{Im } p$  et  $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \text{Ker } p$ , ce qui conclut.  $\square$

### III Formes linéaires et hyperplans

**Définition - Hyperplan**

Si  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , on dit que  $H$  est un *hyperplan* de  $E$  si  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle de  $E$ .

**Exemples.**

1. Comme  $\varphi : (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - z$  est une forme linéaire non nulle de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\text{Ker } \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y - z = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Comme  $\psi : P \mapsto P(2)$  est une forme linéaire non nulle de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\text{Ker } \psi = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. L'hyperplan  $\{f \in \mathcal{C}_0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 0\}$  est associé à la forme linéaire  $f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$  de  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Théorème - Caractérisation des hyperplans**

Un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel  $D$  de  $E$  tel que  $\dim D = 1$  et  $E = H \oplus D$ .

**Démonstration.**

- Supposons que  $H$  est un hyperplan de  $E$ , et considérons  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  non nulle telle que  $H = \text{Ker } \varphi$ . Comme  $\varphi$  est non nulle, il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\varphi(x_0) \neq 0$ , et on a donc  $x_0 \notin H$ . Montrons que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .
  - ◇ Soit  $x \in E$ . On suppose qu'il existe  $x_1 \in E$  et  $x_2 \in \text{Vect}(x_0)$ , tels que  $x = x_1 + x_2$ . On note  $x_2 = \lambda x_0$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \lambda \varphi(x_0) = \lambda \varphi(x_0)$ , donc  $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$ . On en déduit que  $x_1 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$ .
  - ◇ Réciproquement, si  $x_1 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$  et  $x_2 = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$ , alors
 
$$x = x_1 + x_2, \quad x_2 \in \text{Vect}(x_0), \quad \text{et} \quad \varphi(x_1) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \varphi(x_0) = 0_E \text{ donc } x_1 \in \text{Ker } \varphi.$$
- On a donc bien montré que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ .
- Supposons maintenant que  $E = H \oplus D$  et  $\dim D = 1$ . Il existe un vecteur non nul  $x_0 \in D$ , donc  $D = \text{Vect}(x_0)$ . On définit ensuite  $\varphi$  comme l'unique forme linéaire sur  $E$  telle que  $\varphi|_H = 0$  et  $\varphi|_D(\lambda x_0) = \lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a bien  $\text{Ker } \varphi = H$ , et  $\varphi$  est non nulle. Ainsi,  $H$  est un hyperplan de  $E$ .  $\square$

**Théorème - Equations d'un hyperplan**

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formes linéaires non nulles sur  $E$  telles que  $H = \text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$ , alors  $\varphi$  et  $\psi$  sont colinéaires.

**Démonstration.** D'après le théorème précédent, il existe  $x_0 \in E$  tel que  $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$ , et donc  $\varphi(x_0), \psi(x_0) \in \mathbb{K}^*$ . Pour tout  $x \in E$ , on peut écrire  $x = x_1 + \lambda x_0$  avec  $x_0 \in H$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , donc  $\varphi(x) = \lambda \varphi(x_0)$  et  $\psi(x) = \lambda \psi(x_0)$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , on a alors  $\varphi(x) = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \psi(x)$ , et l'égalité est encore vraie si  $\lambda = 0$ . Ainsi, on a  $\varphi = \mu \psi$  avec  $\mu = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ .  $\square$

**Théorème - Intersection d'hyperplans**

Si  $E$  est de dimension finie  $n$ ,

- si  $H_1, \dots, H_m$  sont des hyperplans de  $E$ , alors  $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m) \geq n - m$ ,
- si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - m$ , il existe des hyperplans  $H_1, \dots, H_m$  de  $E$  tels que  $F = H_1 \cap \dots \cap H_m$ .

**Démonstration.**

- Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  des formes linéaires telles que  $H_i = \text{Ker } \varphi_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . On considère ensuite l'application  $f : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ , et on remarque que  $\text{ker } f = H_1 \cap \dots \cap H_m$ . Clairement, on a  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}^m)$ , donc le théorème du rang donne  $\dim H_1 \cap \dots \cap H_m = \dim E - \dim(\text{Im } f) \geq n - m$  car  $\dim \text{Im } f \leq m$ .
- On considère une base  $(e_1, \dots, e_{n-m})$  de  $F$  qu'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Ainsi, si  $x \in E$

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in F \Leftrightarrow a_{n-m+1} = \dots = a_n = 0 \Leftrightarrow e_{n-m+1}^*(x) = \dots = e_n^*(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } e_i^*,$$

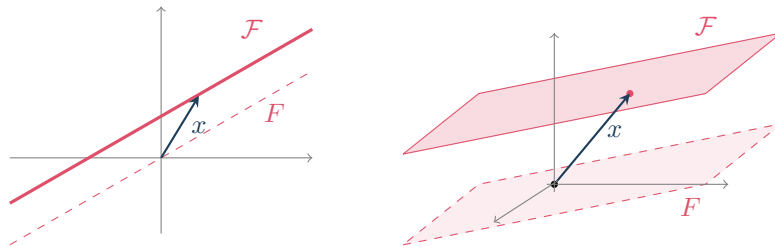
en notant  $e_1^*, \dots, e_n^*$  les formes coordonnées relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Donc  $F = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } e_i^*$ .  $\square$

## IV Sous-espaces affines

Nous nous intéressons ici aux sous-ensembles d'un espace vectoriel obtenus en faisant la "translation" d'un sous-espace vectoriel d'un vecteur  $x \in E$ . Les ensembles obtenus, appelés sous-espaces affines de  $E$ , ne contiennent plus nécessairement  $0_E$ . Ils permettent en particulier de décrire les solutions d'équations linéaires non homogènes, c'est-à-dire avec un second membre.

### Définition - Sous-espace affine

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $x \in E$ , on dit que l'ensemble  $\mathcal{F} = x + F = \{x + u, u \in F\}$  est un sous-espace affine de  $E$ . On dit alors que  $F$  est la direction du sous-espace affine  $\mathcal{F}$ .



**Remarque.** Il est important de remarquer que si  $\mathcal{F}$  est un espace affine, alors sa direction est définie de manière unique.

En effet, si  $\mathcal{F}$  s'écrit  $x + F = y + G$ , où  $x, y \in E$  et  $F, G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , on considère  $u \in F$ , et on remarque que  $x + u \in x + F$ , donc on a  $x + u = y + v$  avec  $v \in G$ . Mais on a aussi  $x \in x + F$ , donc on a  $x = y + v'$  avec  $v' \in G$ . Ainsi, en soustrayant,  $u = v - v' \in G$ , donc  $F \subset G$ . De même,  $G \subset F$ .

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{F} = (1, 1) + \text{Vect}((2, 1))$  est un sous-espace affine. Graphiquement,  $\mathcal{F}$  est représenté dans le plan par la droite passant par le point de coordonnées  $(1, 1)$ , de vecteur directeur donné par  $(2, 1)$ .

**Remarque.** Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est en particulier un sous-espace affine de  $E$  : on peut écrire  $F = 0_E + F$ . La direction du sous-espace affine est  $F$  lui-même.

### Théorème

Si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $E$  de direction  $F$ , alors  $\mathcal{F} = y + F$  pour tout  $y \in \mathcal{F}$ .

**Démonstration.** On sait que  $\mathcal{F}$  s'écrit sous la forme  $\mathcal{F} = x + F$  avec  $x \in E$ . Pour tout  $y \in \mathcal{F}$ , il existe alors  $u \in F$  tel que  $y = x + u$ . Ainsi,  $y + F = x + u + F = x + F = \mathcal{F}$ . En effet, on voit aisément par double inclusion que comme  $u \in F$ ,  $u + F = F$ .  $\square$

### Théorème - Solutions d'une équation linéaire

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ , alors l'équation

$$f(x) = b \quad (E)$$

admet des solutions si et seulement si  $b \in \text{Im } f$ . Dans ce cas, si on note  $x_p$  une solution de  $(E)$ , l'ensemble des solutions de  $(E)$  est un sous-espace affine donné par  $x_p + \text{Ker } f$ .

**Démonstration.** Si  $b \notin \text{Im } f$ , il est clair que  $(E)$  n'a pas de solution. Si  $b \in \text{Im } f$ , alors il existe une solution particulière de  $(E)$  qu'on note  $x_p$ . Pour tout  $x \in E$ , on a alors

$$f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = f(x_p) \Leftrightarrow f(x - x_p) = 0_F \Leftrightarrow x - x_p \in \text{Ker } f \Leftrightarrow x \in x_p + \text{Ker } f.$$

L'ensemble des solutions est alors  $x_p + \text{Ker } f$ , sous-espace affine dirigé par  $\text{Ker } f$ .  $\square$

### Exemples.

1. L'ensemble des solutions d'un système linéaire compatible  $AX = B$ , où  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathbb{K}^n$ , est un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^p$ , donné par

$$X_p + \text{Ker } A$$

En effet, il s'agit du cas ci-dessus appliqué à l'application linéaire  $\varphi_A$  canoniquement associée à  $A$ .

2. Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts, et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ . L'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $P(a_i) = b_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est un sous-espace affine donné par

$$P + \{AQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

où  $P$  est le polynôme interpolateur de Lagrange solution du problème d'interpolation et  $A = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ .

En effet, il s'agit du cas ci-dessus appliqué à  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}^n)$  donnée par  $f : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ , qui vérifie  $\text{Ker } f = \{P \in \mathbb{K}[X], P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0\} = \{AQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ .

### **Théorème - Intersection de sous-espaces affines**

Soit  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $E$ , on note  $F_i$  la direction de  $\mathcal{F}_i$  pour tout  $i \in I$ . Si  $\bigcap_i \mathcal{F}_i \neq \emptyset$ , alors  $\bigcap_i \mathcal{F}_i$  est un sous-espace affine de  $E$  dirigé par  $\bigcap_i F_i$ .

**Démonstration.** On note  $\mathcal{F} = \bigcap_i \mathcal{F}_i$  et  $F = \bigcap_i F_i$ . Par hypothèse, il existe  $x \in \mathcal{F}$ , nous allons montrer que  $\mathcal{F} = x + F$ .

- Si  $y \in \mathcal{F}$ , alors pour tout  $i \in I$ , il existe  $u_i \in F_i$  tel que  $y = x + u_i$ . Par conséquent, pour tout  $i \in I$ , on a  $u_i = y - x$ , et les vecteurs  $u_i$  sont tous égaux à un vecteur qu'on note  $u$ . On a alors  $u \in \bigcap_i F_i$ , donc  $y = x + u \in x + F$ .
- Si  $y \in x + F$ , alors pour tout  $i \in I$ , on a  $y \in x + F_i$  car  $F \subset F_i$ . Ainsi,  $x \in \bigcap_i \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ . □