DM 1

1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$" est vraie.

- *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a :

$$u_{2n} = u_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1, \quad \text{donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2n} = \frac{1}{2}$, et $u_{2n+1} = -1$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{1}{2}$ et $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = -1$. On a :

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1} - 1} = \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1.$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui conclut.

N.B. : On pouvait aussi montrer dans un premier temps par récurrence que $u_{2n} = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire la valeur de u_{2n+1}.

2 Montrer par récurrence : $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$2^n \geqslant n^2$", est vraie.

- *Initialisation.* Si $n = 4$, on a $2^n = 16 = n^2$, donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2n^2.$$

  Nous allons montrer que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, ce qui nous permettra de conclure que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$. On a :

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1.$$

  Les racines du polynôme [a] $X^2 - 2X - 1$ sont $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. On en conclut alors que pour tout $x \geqslant 1 + \sqrt{2}$, on a $x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$. Comme $n \geqslant 4 > 1 + \sqrt{2}$, on a bien $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$, ce qui donne $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui conclut.

a. On peut aussi éviter de calculer les racines en remarquant que $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Comme $n \geqslant 4$, la croissance de la fonction $x \mapsto (x-1)^2 - 2$ entraîne que $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geqslant (4-1)^2 - 2 > 0$.

3 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$n = 2^a(2b+1).$$
On pourra avoir recours à une récurrence forte.
2. Montrer que le couple de la question précédente est unique.

1. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: “il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^a(2b+1)$” est vraie.
   - *Initialisation.* Pour n, le choix $a = b = 0$ montre que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     - Si $n+1$ est impair, alors il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2b+1$. Ainsi, $n+1 = 2^0(2b+1)$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
     - Si $n+1$ est pair, alors il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2k$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k = 2^a(2b+1)$. Ainsi, $n+1 = 2^{a+1}(2b+1)$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^a(2b+1)$.
2. Supposons qu'il existe deux couples d'entiers (a, b) et (a', b') tels que $n = 2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons que $a \neq a'$. On peut supposer sans perte de généralité que $a' < a$. On a alors en divisant par $2^{a'}$ dans l'égalité :
$$2^{a-a'}(2b+1) = 2b'+1.$$
   Il y a contradiction car, comme $a - a' > 0$, l'entier $2^{a-a'}(2b+1)$ est pair, mais $2b'+1$ est impair.
   Par conséquent, on a montré que $a = a'$. On déduit de l'égalité ci-dessus que $2b+1 = 2b'+1$, puis $b = b'$.

---

4 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y. \tag{1}$$
On pourra raisonner par analyse-synthèse, et commencer par déterminer $f(0)$ lorsque f est une fonction vérifiant la condition ci-dessus.

Analyse. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.
- En choisissant $x = y = 0$, on obtient
$$f(0)^2 = f(0),$$
ce qui se récrit $f(0)(f(0)-1) = 0$, donc $f(0) \in \{0, 1\}$.
- Par ailleurs, si on choisit $x = 0$ et $y = 1$, on a
$$f(0)f(1) = f(0)+1, \quad \text{donc} \quad f(0)(f(1)-1) = 1.$$
On en déduit que $f(0) \neq 0$, et donc $f(0) = 1$.
- Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Si on choisit $y = 0$, et on obtient :
$$f(x)f(0) = f(0) + x,$$
soit $f(x) = 1 + x$.

On a donc montré que la fonction f est nécessairement la fonction $f : x \mapsto 1 + x$.

Synthèse. Si $f : x \mapsto 1 + x$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f(x)f(y) = (1+x)(1+y) = 1 + xy + x + y = f(xy) + x + y.$$
On a finalement montré que la fonction $f : x \mapsto 1 + x$ est l'unique solution du problème.
