DM 1

pour le 11.09.2025

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

---

1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

---

2 Montrer : $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

---

3 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$n = 2^a(2b+1).$$
On pourra avoir recours à une récurrence forte.
2. Montrer que le couple de la question précédente est unique.

---

4 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse, et commencer par déterminer $f(0)$ lorsque f est une fonction vérifiant la condition ci-dessus.
