DM 2

pour le 17.09.2025

À chercher en autonomie. Le résultat d'une question peut éventuellement être admis en cas de recherche infructueuse, mais toutes les questions doivent être abordées.

---

1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

1. En développant le membre de gauche, montrer que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \;=\; 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2.$$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \;\leqslant\; \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

---

2 *Transformation d'Abel.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère des réels $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$, et on pose, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} a_i, \qquad \text{et, si } k < n, \qquad b_k = B_{k+1} - B_k.$$

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer a_k en fonction de A_k et A_{k-1}.
2. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k \;=\; A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k.$$

3. *Application.* Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,2^k$.
