

DM 3**1** *Les fonctions hyperboliques et la fonction argsh.*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
2. Montrer que $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
3. Étudier les fonctions ch et sh , et tracer leurs graphes respectifs.
4. Montrer que la fonction sh définit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On notera argsh sa bijection réciproque.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}.$$

6. Justifier que argsh est dérivable sur \mathbb{R} , et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$