# DM 6

---

**Exercice 1.** Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur de $m$.

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & m \\ mx & -m^2y & +mz & = & 1 \\ mx & +y & -m^2z & = & 1 \end{cases}$$

On note $(\mathscr{S})$ le système. Les systèmes suivants sont équivalents à $(\mathscr{S})$ :

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & m \\ & & (m-m^3)z & = & 1-m^2 \\ & (1+m^2)y & -(m^2+m^3)z & = & 1-m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & m \\ & (1+m^2)y & -m^2(1+m)z & = & 1-m^2 \\ & & m(1-m^2)z & = & 1-m^2 \end{cases}$$

- Si $m \notin \{-1, 0, 1\}$, le système admet une unique solution.

$$\left(\frac{m}{1-m^2}, \frac{1+m}{1-m^2}, \frac{1}{m}\right).$$

- Si $m = 0$, il n'y a pas de solution.
- Si $m = -1$, le système équivaut à

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

Les solutions sont $\{(-z-1, 0, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

---

**Exercice 2. Sous-groupes de $\mathbb{R}$.** On souhaite montrer que si $G$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors :

- soit $G$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}^+$,
- soit $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite, on fixe un sous-groupe $G$ de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $a\mathbb{Z} = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Justifier que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
3. Dans cette question, on suppose $a > 0$.
   a. Dans cette question, nous allons montrer que $a \in G$. On raisonne par l'absurde, et on suppose que $a \notin G$.
      i. Justifier qu'il existe $b, c \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tels que $a < b < c < 2a$.
      ii. Justifier que $0 < c - b < a$, et conclure à une contradiction.
   b. Montrer que $a\mathbb{Z} \subset G$.
   c. Nous cherchons à montrer l'autre inclusion : $G \subset a\mathbb{Z}$. On considère $x \in G$, et on pose $n = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$.
      i. Montrer que $0 \leqslant x - na < a$.
      ii. En déduire que $x = na$ et conclure.
4. Dans cette question, on suppose $a = 0$.
   a. Fixons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

*i.* Justifier qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $0 < g < y - x$.

*ii.* Posons $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $ng \in ]x, y[$.

*b.* Déduire de ce qui précède que si $a = 0$ alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**On a donc montré :** **– si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$,**
**– si $a = 0$, alors $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.**

5. **Application.** On note $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
   *a.* Montrer que $G$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   *b.* En utilisant le résultat prouvé ci-dessus, montrer que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. $a\mathbb{Z}$ est non vide car contient $0 = 0a$.
   Soient $x, y \in a\mathbb{Z}$. Il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = ka$ et $y = k'a$. Alors, $x - y = \left(k - k'\right) a \in a\mathbb{Z}$ car $k - k' \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $a\mathbb{Z}$ est stable par différence.
2. Par hypothèse, il existe $x \in G$ non nul. Ainsi, $-x \in G$. Comme $x > 0$ ou $-x > 0$ on en déduit que $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ est non vide.
   Par ailleurs, $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ est minoré par 0. On en déduit donc que $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ admet une borne inférieure.
3. *a.* *i.* Comme $2a > a$ ce n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ donc il existe $c \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $c < 2a$. D'autre part $a$ est un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ donc $a \leqslant c$ et $a \notin G \cap \mathbb{R}_+^\star$ donc $a < c$.
   De même, comme $c > a$ ce n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ donc il existe $b \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $a < b < c$.
   *ii.* On en déduit $0 < c - b < 2a - b$, puis comme $a < b$, on a $-b < -a$, et $c - b < 2a - a = a$.
   On a $c - b \in G$ car $G$ stable par différence et $c - b \in \mathbb{R}_+^\star$ donc $c - b \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$. Comme $c - b < a$, ceci contredit le fait que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^\star$. On en déduit que $a \in G$.
   *b.* C'est du cours : comme $G$ est un groupe et $a \in G$, on a $na \in G$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui donne $a\mathbb{Z} \subset G$.
   *c.* *i.* Par définition de la partie entière, $n \leqslant \frac{x}{a} < n + 1$ d'où $an \leqslant x < na + a$ puis $0 \leqslant x - na < a$.
   *ii.* On a $x \in G$ et $na \in G$ donc $x - na \in G$. Par l'absurde, si $x - na > 0$ alors $x - na \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ or $a$ minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ d'où une contradiction. Ainsi, $x - na = 0$.
   On a ainsi montré que $G \subset a\mathbb{Z}$, ce qui donne $G = a\mathbb{Z}$.
4. *a.* *i.* Comme précédemment, comme $y - x > 0$ ce n'est pas un minorant de $G \cap \mathbb{R}_+^\star$ donc il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^\star$ tel que $0 < g < y - x$.
   *ii.* Par définition de la partie entière on a $\frac{x}{g} < n \leqslant \frac{x}{g} + 1$ d'où $x < ng < x + g < y$.
   *b.* Avec les notations de la question précédente, on a $ng \in G \cap ]x, y[$. On vient de montrer que tout intervalle de la forme $]x, y[$ contient un élément de $G$ c'est-à-dire que $G$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5. *a.* On a $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in G$ d'une part. D'autre part, si $x, y \in G$, on peut noter $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + d\sqrt{2}$, donc $x - y = a - c + (b - d)\sqrt{2} \in G$.
   *b.* On raisonne par l'absurde et on suppose que $G$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, il existe alors $a \in \mathbb{R}^\star$ tel que $G = a\mathbb{Z}$.
   On montre sans difficulté que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$tel que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$. Nécessairement, $a \neq 0$ car $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \neq \{0\}$. Alors, $1 = 1 + 0\sqrt{2} = qa$ avec $q \in \mathbb{Z}(q \neq 0)$ et $\sqrt{2} = 0 + 1\sqrt{2} = pa$ avec $p \in \mathbb{Z}$. On obtient $\sqrt{2} = \frac{pa}{qa} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Ceci est en contradiction avec le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ donc est dense dans $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 3. Une autre preuve de Bolzano-Weierstrass.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n,\ u_k < u_n\}.$$

1. On suppose que $A$ est infini. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite décroissante.
2. On suppose que $A$ est fini. Construire une sous-suite croissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

1. – On pose $\varphi(0) = \min A$. Ce minimum existe car $A$ est infini donc non vide.
   – Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(n)$ construit. L'ensemble $\{m > \varphi(n),\ \forall k > m,\ u_k < u_m\}$ est non vide (sinon, $A \subset [\![0, \varphi(n)]\!]$, et n'est donc pas infini). On peut alors poser $\varphi(n+1) = \min\{m > \varphi(n),\ \forall k > m,\ u_k < u_m\}$.
     On a alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, et $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.

   On a donc construit une sous-suite décroissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Comme $A$ est une partie finie de $\mathbb{N}$, on peut considérer son maximum $N$.
   – On pose $\varphi(0) = N + 1$.
   – Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(n)$ construit avec $\varphi(n) > N$. Comme $\varphi(n) \notin A$, il existe $k > \varphi(n)$ tel que $u_k \geqslant u_{\varphi(n)}$. On pose alors $\varphi(n+1) = k$, de sorte que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geqslant u_{\varphi(n)}$.

   On a alors construit une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est croissante.
3. Dans les deux cas ci-dessus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite monotone. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la sous-suite l'est aussi, et est donc convergente.

---

**Exercice 4.** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f\ :\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{sinon, où } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \text{ et } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Déterminer les points de continuité de $f$.

– Si $x \in \mathbb{Q}^\star$, alors $f(x) \neq 0$, or par densité de $\mathbb{R}\backslash Q$ dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Comme $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \neq f(x)$, donc $f$ n'est pas continue en $x$.

– Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ou $x = 0$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Supposons que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

  Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n > N,\ |f(x_n)| > \varepsilon$. On peut donc construire par récurrence une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f(x_{\varphi(n))}| > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} \in \mathbb{Q}^\star$. On peut donc écrire $x_{\varphi(n)} = \frac{p_n}{q_n}$ où $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ et $p_n \wedge q_n = 1$, ce qui implique que $f(x_{\varphi(n)}) = \frac{1}{q_n}$. Ainsi, $|q_n| < \frac{1}{\varepsilon}$.

  Nous avons ainsi, montré que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une sous-suite $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. En tant que suite d'entiers, elle converge vers un entier $q \in \mathbb{N}^\star$ (et stationne).

  Par conséquent,
  $$p_{\psi(n)} \;=\; \frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}} q_{\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xq.$$

  De même, $xq$ est limite d'une suite d'entiers, c'est donc un entier, noté $p$. On a alors $x = \frac{p}{q}$, ce qui est une contradiction si $x \in \mathbb{Q}^\star$.

  Si $x = 0$, alors $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ stationne en 0 car c'est une suite d'entiers qui a une limite nulle. Ainsi, à partir d'un certain rang, $f(x_{\psi(n)}) = f(0) = 0$, et il y a contradiction.

Finalement, la fonction $f$ est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}^\star$, et continue en tout autre point.

---