DS 2

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.
2. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.
3. Donner la valeur de $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.
4. On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f, et calculer f'.
   b. En déduire une expression plus simple de f.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} \;=\; 0$.
6. Déterminer tous les réels x tels que $\frac{x-1}{x+1} < \frac{2x+1}{2x}$.
7. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{15}x) \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

1. La formule du binôme donne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \;=\; (1+3)^n \;=\; 4^n$.
2. Si $x \in \mathbb{R}^\star$, on a

$$\frac{\tan x}{x} \;=\; \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}, \quad \text{donc} \quad \frac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \quad \text{car} \quad \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ et } \cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

   Autre méthode : on reconnaît un taux d'accroissement de la fonction tan : on a

$$\frac{\tan x}{x} \;=\; \frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \tan'(0) \;=\; \frac{1}{\cos^2(0)} \;=\; 1.$$

3. On a $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;=\; -\frac{\pi}{3}$. D'autre part, $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.
4. *a.* Si $x \in \mathbb{R}$, le réel $f(x)$ est bien défini si et seulement si

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{x} \in [-1,1], \\ 2x-1 \in [-1,1] \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 2x \leqslant 2 \end{cases} \quad \textit{i.e.} \quad x \in [0,1].$$

   Finalement, l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D} = [0,1]$.
   – La fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,1[$, et $g(]0,1[) \subset]-1,1[$. Comme la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, on déduit par composition que la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ est dérivable sur $]0,1[$.
   – La fonction $h : x \mapsto 2x-1$ est dérivable sur $]0,1[$ et $h(]0,1[) \subset]-1,1[$, donc par composition à nouveau, la fonction $x \mapsto \arcsin(2x-1)$ est dérivable sur $]0,1[$.

   Ainsi, f est dérivable sur $]0,1[$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \;=\; 0.$$

   b. Ainsi, comme f est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ et de dérivée nulle, la fonction est constante sur $]0,1[$, et même sur $[0,1]$ par continuité de f sur $[0,1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f(x) \;=\; f(0) \;=\; -\frac{1}{2}\arcsin(-1) \;=\; \frac{1}{2}\arcsin 1 \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

5. Le discriminant associé à l'équation polynomiale est $\Delta = -3-4\mathrm{i}$, qui a pour racines carrées complexes $1-2\mathrm{i}$ et $-1+2\mathrm{i}$. On obtient alors les solutions $1+\mathrm{i}$ et $2-\mathrm{i}$.
6. L'équation est valide pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$, on a
$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{2x+1}{2x} \iff \frac{(2x+1)(x+1)-2x(x-1)}{2x(x+1)} > 0 \iff \frac{5x+1}{2x(x+1)} > 0.$$
Un tableau de signe donne alors que l'ensemble des solutions est $]-1,-\frac{1}{5}[\cup]0,+\infty[$.
7. On note d'abord que $\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{15}x)$ n'a un sens que si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}]$.
Par ailleurs, si $x \in [-\frac{1}{\sqrt{15}}, 0]$, alors $\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{15}x) \leqslant 0$ donc x n'est pas solution. Or si $x \in]0, \frac{1}{\sqrt{15}}]$,
$$\begin{aligned}\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} &\iff \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{15}x)\\ &\iff \sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{15}x)\right)\end{aligned}$$
car $\arcsin x$, $\arcsin(\sqrt{15}x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sqrt{15}x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient alors
$$\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} \iff x = \cos(\arcsin(\sqrt{15}x)) \iff x = \sqrt{1-15x^2}$$
Comme $x \geqslant 0$, on a finalement
$$\arcsin(x)+\arcsin(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2} \iff x^2 = 1-15x^2 \iff 16x^2 = 1 \iff x = \frac{1}{4}.$$
La seule solution est donc $\frac{1}{4}$.
N.B. : on pouvait aussi (en justifiant) composer l'équation de départ par cos.

Exercice 2 – La fonction *argth*

On rappelle que la fonction th est définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Faire l'étude de la fonction th : dérivabilité et dérivée, variations, limites.
2. Montrer que la fonction th définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. On note argth sa bijection réciproque.
3. Monter que argth est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

1. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}'(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$
Ainsi, la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs,
$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{car } \mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}} = -\mathrm{th}(x)$, la fonction th est impaire, donc $\mathrm{th}(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.
2. La fonction th est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$ d'après la question précédente.
3. Comme la fonction $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ ne s'annule pas que $\mathbb{R}$, la fonction argth est dérivable sur $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$, et pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(x))} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Exercice 3 – Développement en série entière de *arctan*

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\arctan x \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1. *a.* Soient $q \in \mathbb{R}$ avec $q \neq -1$ et $n \in \mathbb{N}$. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, simplifier

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $S_n'(x)$ et en donner une expression simplifiée à l'aide de la question 1a.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R_n(x) \;=\; \arctan(x) - S_n(x).$$

   a. Calculer $R_n(0)$.

   b. Établir les variations de la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son signe. On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

   c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer les nombres $S_n(x), \arctan(x)$ et $S_{n+1}(x)$ selon la parité de n.

   d. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\arctan(x) - S_n(x)| \;\leqslant\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

   On pourra pour cela commencer par calculer $S_{n+1}(x) - S_n(x)$.

3. Démontrer la formule annoncée.

---

1. *a.* On a $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k q^k \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} (-q)^k \;=\; \frac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$ car $q \neq -1$.

   b. La fonction S_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$S_n'(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k \;=\; \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2},$$

   en appliquant le résultat de la question 1a avec $q = x^2$, qui vérifie bien $q \neq -1$.

2. *a.* On a $R_n(0) = 0$.

   b. La fonction R_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$R_n'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \;=\; \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \;=\; \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

   – Si n est pair, R_n' est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc R_n décroît sur $\mathbb{R}_+$. Comme $R_n(0) = 0$, la fonction R_n est négative sur $\mathbb{R}_+$.

   – Si n est impair, R_n' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc R_n croît sur $\mathbb{R}_+$. Comme $R_n(0) = 0$, la fonction R_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

   c. Soient $x \in \mathbb{R}_+$.

   – Si n est pair, la question précédente donne $\arctan x - S_n(x) \leqslant 0$ et $\arctan x - S_{n+1}(x) \geqslant 0$ car $n+1$ est impair. Finalement, $S_n(x) \leqslant \arctan x \leqslant S_{n+1}(x)$.

   – Si n est impair, la question précédente donne $\arctan x - S_n(x) \geqslant 0$ et $\arctan x - S_{n+1}(x) \leqslant 0$ car $n+1$ est pair. Finalement, $S_{n+1}(x) \leqslant \arctan x \leqslant S_n(x)$.

d. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$S_{n+1}(x) - S_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \;=\; (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

– Si n est pair, $0 \leqslant \arctan x - S_n(x) \leqslant S_{n+1}(x) - S_n(x)$, donc $|\arctan x - S_n(x)| \leqslant |S_{n+1}(x) - S_n(x)|$.

– Si n est impair, $S_{n+1}(x) - S_n(x) \leqslant \arctan x - S_n(x) \leqslant 0$, donc $|\arctan x - S_n(x)| \leqslant |S_{n+1}(x) - S_n(x)|$.

Ainsi, dans tous les cas,

$$|\arctan x - S_n(x)| \;\leqslant\; |S_{n+1}(x) - S_n(x)| \;=\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

car $x \in \mathbb{R}_+$.

3. Si $x \in [0,1]$, on a, d'après la question précédente,

$$\left| \arctan x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| \;\leqslant\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \;\leqslant\; \frac{1}{2n+3}$$

car $x \leqslant 1$. Comme $\frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par comparaison que $\arctan x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *i.e.*

$$\arctan x \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Si $x \in]-1,0[$, on a $-x \in]0,1[$, donc d'après ce qui précède,

$$|\arctan(-x) - S_n(-x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or par imparité de arctan et de S_n, on a $|\arctan(-x) - S_n(-x)| \;=\; |-\arctan x + S_n(x)| \;=\; |\arctan x - S_n(x)|$, donc $|\arctan x - S_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4 – Somme d'une série

Le but de cet exercice est de montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$

La fonction *cotan*

On considère la fonction cotan définie par

$$\text{cotan} \;:\; x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cotan. Montrer que cotan est impaire et π-périodique.
2. Justifier que cotan est dérivable sur $\mathscr{D}$, et calculer sa dérivée. Faire l'étude des variations de cotan (limites comprises) sur $]0,\pi[$.
3. *a.* Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. On pourra par exemple étudier le signe de deux fonctions bien choisies.

   b. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\text{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2(x).$$

Calcul d'une somme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P_n(z) \;=\; (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1}$.

4. Montrer que les solutions de l'équation $P_n(z) = 0$ sont les complexes $z_k = -\mathrm{i}\ \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1, 2n]\!]$.
5. *a.* Vérifier que pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $2n+1-k \in [\![1,n]\!]$ et $z_{2n+1-k} = -z_k$.

b. En déduire :

$$\sum_{k=1}^{2n} z_k = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} z_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} z_k^2.$$

6. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = -\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2n} z_k\, z_\ell.$$

7. Montrer pour $z \in \mathbb{C}$, que :

$$P_n(z) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2k}.$$

On note C_{2n-2} le coefficient devant z^{2n-2} et C_{2n} le coefficient devant z^{2n} dans l'expression de $P_n(z)$ ci-dessus. On admet[1] *le résultat suivant :*

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2n} z_k\, z_\ell = \frac{C_{2n-2}}{C_{2n}}.$$

8. Calculer C_{2n-2} et C_{2n}, et montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Somme de la série

9. À l'aide des questions précédentes et de la question 3b, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [\pi]$, donc la fonction cotan est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est impaire sur $\mathscr{D}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow -x \in \mathscr{D}$, et si $x \in \mathscr{D}$,

$$\operatorname{cotan}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{cotan} x.$$

Par ailleurs, cotan est π-périodique : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \in \mathscr{D} \Leftrightarrow x+\pi \in \mathscr{D}$, et si $x \in \mathscr{D}$,

$$\operatorname{cotan}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{cotan} x.$$

2. La fonction cotan est dérivable sur $\mathscr{D}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Si $x \in \mathscr{D}$, on a

$$\operatorname{cotan}'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \sin'(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\left(1+\operatorname{cotan}^2(x)\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in]0,\pi[$, on a $\operatorname{cotan}'(x) < 0$, et cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$.
Comme $\sin x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} = 0^+$ et $\cos 0 = 1$, on a $\operatorname{cotan} x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$. On a par ailleurs $\operatorname{cotan} x \underset{x\to \pi^-}{\longrightarrow} -\infty$.

3. *a.*
   – On étudie $f : x \mapsto \sin x - x$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) \leqslant f(0) = 0$, d'où $\sin x \leqslant x$.
   – On étudie $g : x \mapsto \tan x - x$. La fonction g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g'(x) = \tan^2 x \geqslant 0$, donc g est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$, d'où $\tan x \geqslant x$.

   b. Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, en passant à l'inverse puis au carré (les trois nombres sont positifs) on obtient

$$1+\operatorname{cotan}^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)} \geqslant \frac{1}{x^2} \geqslant \frac{1}{\tan^2(x)} = \operatorname{cotan}^2(x).$$

1. Ce résultat sera établi dans le cours sur les polynômes.

4. On remarque que $P_n(1) = 2^{2n+1} \neq 0$, donc 1 n'est par solution de $P_n(z) = 0$. Si $z \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2n+1} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ \frac{z+1}{z-1} = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} \quad \textit{(pas de solution pour } k = 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z = \frac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{2n+1}}\, 2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\mathrm{e}^{ik\frac{\pi}{2n+1}}\, 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ z = -\mathrm{i}\ \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

5. *a.* Pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$ on a $n = 2n+1-(n+1) \geqslant 2n+1-k \geqslant 2n+1-2n = 1$. De plus,

$$z_{2n+1-k} \;=\; -\mathrm{i}\ \mathrm{cotan}\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) \;=\; -\mathrm{i}\ \mathrm{cotan}\left(\pi + \frac{-k\pi}{2n+1}\right) \;=\; \mathrm{i}\ \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \;=\; -z_k.$$

   b. On a

$$\sum_{k=1}^{2n} z_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=n+1}^{2n} z_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=n+1}^{2n} z_{2n+1-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k'=1}^{n} z_{k'} \;=\; 0,$$

   avec le changement d'indice $k' = 2n+1-k$. Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{2n} z_k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} z_k^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} (-z_{2n+1-k})^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + \sum_{k'=1}^{n} z_{k'}^2 \;=\; 2\sum_{k=1}^{n} z_k^2,$$

   toujours avec le changement d'indice $k' = 2n+1-k$.

6. On a

$$\left(\sum_{k=1}^{2n} z_k\right)^2 \;=\; \left(\sum_{k=1}^{2n} z_k^2\right) + 2\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 2n} z_k\, z_\ell \;=\; 2\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right) + 2\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 2n} z_k\, z_\ell.$$

   Comme $\sum_{k=1}^{2n} z_k = 0$, on déduit de ce qui précède que $2\sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 2n} z_k\, z_\ell = 0$, soit $\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \;=\; -\sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 2n} z_k\, z_\ell$.

7. On a :

$$\begin{aligned} P_n(z) \;&=\; \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} z^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} z^k (-1)^{2n+1-k} \\ &=\; \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} z^k \left(1 - (-1)^{2n+1-k}\right) \qquad \left(\textit{on a } -(-1)^{2n+1-k} = -(-1)^{2n+1}(-1)^{-k} = +(-1)^k\right) \\ &=\; \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} z^k \left(1 + (-1)^k\right) \qquad (\textit{on regroupe des indices pairs et les indices impairs}) \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2k} \underbrace{\left(1 + (-1)^{2k}\right)}_{=2} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} z^{2k+1} \underbrace{\left(1 + (-1)^{2k+1}\right)}_{=0} \\ &=\; 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2k}. \end{aligned}$$

8. On a :
   - ◇ $C_{2n-2} = 2\binom{2n+1}{2n-2} = 2\binom{2n+1}{3} = 2\frac{(2n+1)\times 2n \times (2n-1)}{3 \times 2 \times 1} = 2\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$.
   - ◇ $C_{2n} = 2\binom{2n+1}{2n} = 2\binom{2n+1}{1} = 2(2n+1)$.

   Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} -z_k^2 = \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant 2n} z_k \times z_\ell = \frac{\mathrm{C}_{2n-2}}{\mathrm{C}_{2n}} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

9. Si $k \in [\![1, n]\!]$, on déduit de la question 3b en choisissant $x = \frac{k\pi}{2n+1}$ que

$$\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}} \leqslant 1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Ainsi, en multipliant par $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

En sommant les inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$$

Or, on a

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2\pi^2 n^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{12\, n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2} = \frac{\pi^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{6\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right) = \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{2n^2+2n}{3} = \frac{2\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$

D'où, par encadrement, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 5 – Bonus

Cet exercice n'est à traiter que lorsque tout le reste l'aura été.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x^2 - y^2) = (f(x) + f(y))(x - y). \tag{$\star$}$$

Analyse. Soit f une fonction qui vérifie $(\star)$.

- On remarque d'abord qu'en choisissant $x = y = 0$ dans la relation donnée par $(\star)$, on obtient $f(0) = 0$.
- Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x^2 - (-x)^2) = (f(x) + f(-x))(x - (-x)), \quad \text{donc} \quad 2x(f(x) + f(-x)) = f(0) = 0.$$

  On en déduit que si $x \in \mathbb{R}^\star$, $f(x) = -f(-x)$. Comme de plus $f(0) = 0$, f est impaire.
- Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}$, on écrit successivement la relation $(\star)$ avec le couple (x, y) puis le couple $(x, -y)$:

$$\begin{aligned} f(x^2 - y^2) &= (f(x) + f(y))(x - y) &&= xf(x) - yf(x) + xf(y) - yf(y) \\ f(x^2 - y^2) &= (f(x) + f(-y))(x + y) &&= xf(x) + yf(x) - xf(y) - yf(y) \end{aligned}$$

  par imparité de f. On remarque que l'égalité de ces deux expressions s'écrit $2yf(x) - 2xf(y) = 0$. On a donc, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$yf(x) = xf(y).$$

  En choisissant maintenant $y = 1$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(1)x$. Ainsi, f est de la forme $f : x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Réciproquement, si f est de la forme $f : x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) + f(y))(x - y) = \alpha(x + y)(x - y) = \alpha(x^2 - y^2) = f(x^2 - y^2),$$

donc f vérifie $(\star)$.

Finalement, les seules fonctions solutions sont les fonctions de la forme $\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.