DS 2

11.10.2025 – 3h

- *Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés.*
- *Il est rappelé que :*
  - ⋆ *toute affirmation doit être rigoureusement justifiée,*
  - ⋆ *tout résultat obtenu doit être mis en valeur (encadré ou souligné).*
- *La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.*
- *Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur dénoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.
3. Donner la valeur de $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.
4. On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f, et calculer f'.
   b. En déduire une expression plus simple de f.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$.
6. Déterminer tous les réels x tels que $\dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{2x+1}{2x}$.
7. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{15}x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 – La fonction *argth*

On rappelle que la fonction th est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Faire l'étude de la fonction th : dérivabilité et dérivée, variations, limites.
2. Montrer que la fonction th définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. On note argth sa bijection réciproque.
3. Monter que argth est dérivable sur J et calculer sa dérivée.

Exercice 3 – Développement en série entière de *arctan*

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arctan x \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

1. *a.* Soient $q \in \mathbb{R}$ avec $q \neq -1$ et $n \in \mathbb{N}$. En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique, simplifier

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k.$$

   b. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $S_n'(x)$ et en donner une expression simplifiée à l'aide de la question 1a.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R_n(x) \;=\; \arctan(x) - S_n(x).$$

   a. Calculer $R_n(0)$.

   b. Établir les variations de la fonction R_n sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire son signe. On pourra distinguer les cas n pair et n impair.

   c. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer les nombres $S_n(x), \arctan(x)$ et $S_{n+1}(x)$ selon la parité de n.

   d. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\arctan(x) - S_n(x)| \;\leqslant\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

   On pourra pour cela commencer par calculer $S_{n+1}(x) - S_n(x)$.

3. Démontrer la formule annoncée.

Exercice 4 – Somme d'une série

Le but de cet exercice est de montrer :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$

La fonction *cotan*

On considère la fonction cotan définie par

$$\operatorname{cotan} \;:\; x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de cotan. Montrer que cotan est impaire et π-périodique.
2. Justifier que cotan est dérivable sur $\mathscr{D}$, et calculer sa dérivée. Faire l'étude des variations de cotan (limites comprises) sur $]0, \pi[$.
3. *a.* Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. On pourra par exemple étudier le signe de deux fonctions bien choisies.

   b. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x).$$

Calcul d'une somme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P_n(z) \;=\; (z+1)^{2n+1} - (z-1)^{2n+1}$.

4. Montrer que les solutions de l'équation $P_n(z) = 0$ sont les complexes $z_k = -\mathrm{i}\,\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1, 2n]\!]$.

5. *a.* Vérifier que pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $2n+1-k \in [\![1, n]\!]$ et $z_{2n+1-k} = -z_k$.
   b. En déduire :
$$\sum_{k=1}^{2n} z_k = 0, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{2n} z_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} z_k^2.$$
6. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = -\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2n} z_k\, z_\ell.$$
7. Montrer pour $z \in \mathbb{C}$, que :
$$P_n(z) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} z^{2k}.$$

On note C_{2n-2} le coefficient devant z^{2n-2} et C_{2n} le coefficient devant z^{2n} dans l'expression de $P_n(z)$ ci-dessus. On admet[1] le résultat suivant :
$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant 2n} z_k\, z_\ell = \frac{C_{2n-2}}{C_{2n}}.$$

8. Calculer C_{2n-2} et C_{2n}, et montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Somme de la série

9. À l'aide des questions précédentes et de la question 3b, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5 – Bonus

Cet exercice n'est à traiter que lorsque tout le reste l'aura été.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x^2 - y^2) = (f(x) + f(y))(x - y). \qquad (\star)$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Ce résultat sera établi dans le cours sur les polynômes.