DS 3

Corrigé

Exercice 1 – Étude d'une application

Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cap A) \cup B \end{array}$$

1. Calculer $f(\varnothing), f(A), f(B)$ et $f(E)$.
2. Montrer que pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$, on a
$$X \subset Y \;\Rightarrow\; f(X) \subset f(Y).$$
3. Montrer que $f \circ f = f$, c'est-à-dire que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f \circ f(X) = f(X)$.
4. Soient F un ensemble et $g : F \to F$ une application telle que $g \circ g = g$. Montrer les équivalences suivantes :
   - ◇ g est injective $\Leftrightarrow g = \mathrm{Id}_F$,
   - ◇ g est surjective $\Leftrightarrow g = \mathrm{Id}_F$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

1. On a $f(\varnothing) = B$, $f(A) = A \cup B$, $f(B) = B$ et $f(E) = A \cup B$.
2. Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \subset Y$. On a $(X \cap A) \subset (Y \cap A)$ puis $(X \cap A) \cup B \subset (Y \cap A) \cup B$ d'où $f(X) \subset f(Y)$.
3. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(f(X)) = (((X \cap A) \cup B) \cap A) \cup B$. Or
$$((X \cap A) \cup B) \cap A \;=\; (X \cap A \cap A) \cup (B \cap A) \;=\; (X \cap A) \cup (B \cap A).$$
Par conséquent, $f(f(X)) \;=\; (X \cap A) \cup (B \cap A) \cup B \;=\; (X \cap A) \cup B$ car $(A \cap B) \cup B = B$.
4. - ◇ On suppose g injective. Soit $x \in F$, on a $g(g(x)) = g(x)$ d'où $g(x) = x$ par injectivité. Ainsi, $g = \mathrm{Id}_F$.
     Réciproquement, si $g = \mathrm{Id}_F$, on sait que g est injective.
   - ◇ On suppose g surjective. Soit $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Alors, $g(y) = g(g(x)) = g(x) = y$. Ainsi, $g = \mathrm{Id}_F$.
     Réciproquement, si $g = \mathrm{Id}_F$, on sait que g est surjective.
5. On suppose f bijective. Comme $f \circ f = f$, on a $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$. D'après la question 1, on a alors $\varnothing = f(\varnothing) = B$ et $E = f(E) = A \cup B = A$.
   Réciproquement, supposons $B = \varnothing$ et $A = E$. Alors, pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(X) = (X \cap E) \cup \varnothing = X$. Par conséquent, $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(E)}$ et f est bien bijective.
   On a donc montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir f bijective est : $B = \varnothing$ et $A = E$.

Exercice 2 – Suites de parties fractionnaires et densité dans $[0,1[$

Pour tout réel x, on appelle *partie fractionnaire* de x le réel
$$F(x) \;=\; x - \lfloor x \rfloor.$$
On dit qu'une partie D de $[0,1[$ est dense dans $[0,1[$ si pour tous $a, b \in [0,1[$ avec $a < b$, il existe $y \in D$ tel que $y \in [a, b]$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F(x) \in [0,1[$.

Exemples de suites de parties fractionnaires

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F(nx) = nx - \lfloor nx \rfloor$.

2. Si $x \in \mathbb{Z}$, que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Soit $x \in \mathbb{Q}$. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$.
   a. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période q, c'est-à-dire :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+q} = u_n.$$
   b. En déduire que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini, et montrer que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans $[0,1[$.

Exemples de suites denses dans $[0,1[$

On dit qu'une suite réelle (x_n) est *à croissance lente* si

$$\begin{cases} (x_n) \text{ est croissante,} \\ x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \\ x_{n+1} - x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

4. Chacune des suites suivantes est-elle à croissance lente ? Justifier.
   $$(n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (\ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}.$$
5. On considère maintenant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à croissance lente telle que $x_0 = 0$. On fixe par ailleurs $a, b \in [0,1[$ tels que $a < b$, et on note $\varepsilon = b - a$.
   a. Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.
   b. On note $A = \lfloor x_N \rfloor + 1$. Justifier l'existence de $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant A + a\}$, et préciser pourquoi $n_0 > N$. *Il pourra être utile de faire une représentation graphique.*
   c. Montrer que $x_{n_0} \in [A+a, A+b]$.
   d. En déduire que $\{F(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1[$.

1. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. En soustrayant par $\lfloor x \rfloor$, on obtient $0 \leqslant F(x) < 1$.
2. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $nx \in \mathbb{Z}$, donc $\lfloor nx \rfloor = nx$, donc $u_n = nx - \lfloor nx \rfloor = 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.
3. *a.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$u_{n+q} = (n+q)x - \lfloor (n+q)x \rfloor = nx + qx - \lfloor nx + nq \rfloor = nx + qx - (\lfloor nx \rfloor + nq) = nx - \lfloor nx \rfloor = u_n,$$
   car comme $nq \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor nx + nq \rfloor = \lfloor nx \rfloor + nq$.
   b. Ainsi, par périodicité, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}\}$.
   - Si $u_0 = \ldots = u_{q-1} = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans $[0,1[$.
   - Sinon, on note u_{k_0} le plus petit des réels non nuls parmi $u_0, \ldots, u_{q-1}$. Si $0 < a < b < u_{k_0}$, alors il n'y a pas d'élément de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dans $[a,b]$. Ainsi, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans $[0,1[$.
4. - On a $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas à croissance lente.
   - La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$. Par ailleurs, on obtient à l'aide de la quantité conjuguée
   $$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =, \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   donc la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance lente.
   - La suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et tend vers $+\infty$. Par ailleurs,
   $$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   donc la suite $(\ln n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est à croissance lente.
5. *a.* Ceci découle directement de la convergence vers 0 de la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Il suffit de justifier que $\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant A + a\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{N}$. Pour commencer, 0 minore $\mathcal{N}$, puis comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N',\ x_n \geqslant A + a$, donc $x_{N'} \geqslant A + a$.

Par ailleurs, $x_N < \lfloor x_N \rfloor + 1 = A \leqslant A + a \leqslant x_{n_0}$. Comme $x_N < x_{n_0}$, la croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne $N < n_0$.

c. Par définition de n_0, on a $x_{n_0-1} < A + a \leqslant x_{n_0}$. On en déduit que $x_{n_0-1} - x_{n_0} < A + a - x_{n_0}$, c'est-à-dire $x_{n_0} - (A + a) < x_{n_0} - x_{n_0-1} < \varepsilon$, car $n_0 > N$. Finalement, $A + a \leqslant x_{n_0} < A + a + \varepsilon < A + b$, donc $x_{n_0} \in [A + a, A + b]$.

d. On a vu que pour tous $a, b \in [0, 1[$ tels que $a < b$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [A + a, A + b]$. On en déduit alors que $\lfloor x_{n_0} \rfloor = A$, donc $F(x_{n_0}) = x_{n_0} - A$. D'après la question précédente, on a alors $F(x_{n_0}) \in [a, b]$. On a alors montré la densité de $\{F(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ dans $[0, 1[$.

Exercice 3 – Suites de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Remarque : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy si deux termes quelconques u_p et u_q sont arbitrairement proches pourvu que p et q soient suffisamment grands.

Partie I – Une condition nécessaire de convergence

1. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Partie II – Convergence des suites de Cauchy

On se propose de montrer dans cette partie que toute suite de Cauchy converge. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$A_n = \{u_k,\ k \geqslant n\}.$$
Justifier que A_n possède une borne inférieure et une borne supérieure. Dans la suite, on notera
$$v_n = \inf A_n, \quad \text{et} \quad w_n = \sup A_n.$$
4. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
6. Montrer que $w_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
7. Conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. On utilise la définition en choisissant $\varepsilon = 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ |u_p - u_q| < 1.$$
Ainsi, pour tout $p \geqslant N$, $|u_p - u_N| \leqslant 1$, donc $|u_p| - |u_N| \leqslant 1$ par la seconde inégalité triangulaire, donc $|u_p| \leqslant 1 + |u_N|$. Finalement, on vient de voir que la suite est bornée à partir du rang N, donc elle est bornée.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Soient $p \geqslant N$ et $q \geqslant N$. On a par inégalité triangulaire
$$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leqslant |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
La suite est donc de Cauchy.

3. On a $u_n \in A_n$ donc A_n est non vide et A_n est bornée car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc bornée. Ainsi, A_n possède une borne supérieure et une borne inférieure.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $w_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\}$, on a pour tout $k \geqslant n+1$, $u_k \leqslant w_n$. Par conséquent, w_n est un majorant de A_{n+1}. On en déduit alors que $w_n \geqslant \sup A_{n+1} = w_{n+1}$. Ceci montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   De même, si $n \in \mathbb{N}$, comme $v_n = \inf\{u_k,\ k \geqslant n\}$, on a pour tout $k \geqslant n+1$, $u_k \geqslant v_n$. Par conséquent, v_n est un minorant de A_{n+1}. On en déduit alors que $v_n \leqslant \inf A_{n+1} = v_{n+1}$. Ceci montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in A_n$, on a $v_n = \inf A_n \leqslant u_n \leqslant \sup A_n = w_n$, d'où $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.
6. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ -\varepsilon < u_p - u_q < \varepsilon$. Fixons $n \geqslant N$ et montrons que $|w_n - u_n| = w_n - u_n \leqslant \varepsilon$.
   - Si $q \geqslant N$, on a alors : $\forall p \geqslant N,\ u_p < u_q + \varepsilon$. Par conséquent, $u_q + \varepsilon$ est un majorant de A_n, ce qui entraine que $\sup A_n \leqslant u_q + \varepsilon$. En d'autres termes, $w_n \leqslant u_q + \varepsilon$.
   - On a donc montré : $\forall q \geqslant N,\ w_n - \varepsilon \leqslant u_q$, c'est-à-dire que $w_n - \varepsilon$ est un minorant de A_n. On en déduit que $w_n - \varepsilon \leqslant \inf A_n = v_n$. Par conséquent, $w_n - v_n \leqslant \varepsilon$.

   On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |w_n - u_n| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $w_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
7. Par ce qui précède, les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ainsi, elles convergent toutes deux vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Ensuite, par encadrement d'après la question 5, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui conclut.

Problème – Homographies de $\mathbb{C}$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifient $ad - bc \neq 0$, on dit que l'application

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C},\ cz+d=0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

est une *homographie*.

Un exemple

On introduit l'application

$$h\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{\mathrm{i}z+\mathrm{i}}{-z+1} \end{array}$$

1. Justifier que h est une homographie, et montrer que pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, on a $h(z) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que h est injective.
3. Déterminer les nombres complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que l'équation $h(z) = w$ ait au moins une solution. L'application h est-elle surjective ? En déduire une partie F de $\mathbb{C}$ telle que h définisse une bijection de $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ sur F.

Homographies conservant $\mathbb{U}$

Dans cette partie, on cherche à déterminer toutes les homographies h de $\mathbb{C}$ telles que h est bien définie sur $\mathbb{U}$, et :

$$\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \text{ existe et } h(z) \in \mathbb{U}. \tag{$\mathscr{P}$}$$

On dit alors que h *conserve* $\mathbb{U}$.

4. *Préliminaire.* Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'})$.
5. *Deux types d'homographies conservant* $\mathbb{U}$.
   a. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z} \tag{1}$$
   définit une homographie qui vérifie la propriété $(\mathscr{P})$. On dira alors que h est une homographie de type (1).
   b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction
   $$h : z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1} \tag{2}$$

définit une homographie qui vérifie la propriété ($\mathscr{P}$). On dira alors que h est une homographie de type (2).
On pourra (par exemple) utiliser la question 4.

6. On cherche à montrer dans cette question que toutes les homographies conservant $\mathbb{U}$ sont soit de type (1), soit de type (2).
On considère $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On suppose que
$$h \,:\, z \;\mapsto\; \frac{az+b}{cz+d}$$
est une homographie qui vérifie la propriété ($\mathscr{P}$).
   a. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \;=\; |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$
   b. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que :
$$\text{si pour tout } \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\,\mathfrak{Re}(v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0, \quad \text{alors } u = v = 0.$$
   Déduire alors de la question précédente que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.
   c. Si $a = 0$, montrer que h est une homographie de type (1).
   d. On suppose désormais que $a \neq 0$. Montrer que
$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) \;=\; 0.$$
   e. Montrer que si $|a| = |c|$, alors $ad - bc = 0$. Qu'en déduire dans ce cas ?
   f. Montrer que si $|a| = |d|$, alors h est une homographie de type (2), et conclure.

1. L'application h est de la forme de l'énoncé avec $a = b = \mathrm{i}$, $c = -1$ et $d = 1$, donc $ad - bc = 2\mathrm{i} \neq 0$, et h est bien une homographie. Si $z \in \mathbb{U}$ et $z \neq 1$, on a
$$h(z) \;=\; \frac{(\mathrm{i}z+\mathrm{i})(-\bar{z}+1)}{(-z+1)(-\bar{z}+1)} \;=\; \frac{-\mathrm{i}z\bar{z} + \mathrm{i}(z-\bar{z}) + \mathrm{i}}{|1-z|^2} \;=\; \frac{-\mathrm{i}|z|^2 - 2\,\mathfrak{Im}(z) + \mathrm{i}}{|1-z|^2} \;=\; -\frac{2\,\mathfrak{Im}(z)}{|1-z|^2},$$
car $|z| = 1$. Ainsi, $h(z) \in \mathbb{R}$.
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On suppose que $h(z) = h(z')$, c'est-à-dire
$$(\mathrm{i}z+\mathrm{i})(-z'+1) \;=\; (\mathrm{i}z'+\mathrm{i})(-z+1), \quad \text{ou encore} \quad -\mathrm{i}zz' + \mathrm{i}(z-z') + \mathrm{i} \;=\; -\mathrm{i}zz' + \mathrm{i}(z'-z) + \mathrm{i}.$$
On en déduit que $2\mathrm{i}(z - z') = 0$, donc $z = z'$. La fonction h est alors injective.
3. Soit $w \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, on a
$$h(z) = w \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{i}z + \mathrm{i}) \;=\; w(1-z) \;\Leftrightarrow\; z(\mathrm{i}+w) = w - \mathrm{i}.$$
Par conséquent, l'équation a une unique solution si $w \neq -\mathrm{i}$, et n'a pas de solution sinon. On en déduit :
   – que h n'est pas surjective car $-\mathrm{i}$ n'a pas d' antécédent,
   – que h est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$.
4. On a : $|z+z'|^2 \;=\; (z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) \;=\; z\bar{z} + z\bar{z'} + \bar{z}z' + z'\bar{z'} \;=\; |z|^2 + z\bar{z'} + \overline{z\bar{z'}} + |z'|^2 \;=\; |z|^2 + |z'^2| + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{z'})$.
5. *a.* L'application est de la forme de l'énoncé avec $a = 0$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $c = 1$ et $d = 0$, donc $ad - bc = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$, donc h est bien une homographie.
   Par ailleurs, si $z \in \mathbb{U}$, on a $z \neq 0$ donc $h(z)$ est bien défini, et $|h(z)| = \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}{|z|} = 1$.
   b. L'application est de la forme de l'énoncé avec $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $b = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $c = \bar{\alpha}$ et $d = 1$, donc h est bien une homographie, car $ad - bc = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \alpha\bar{\alpha}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - |\alpha|^2) \neq 0$, du fait que $|\alpha| \neq 1$.
   Par ailleurs,
      – si $\alpha = 0$, l'application h est définie sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{U}$,
      – si $\alpha \neq 0$, alors h est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{1}{\bar{\alpha}}\}$ donc sur $\mathbb{U}$ car $\left|-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right| \neq 1$ donc $-\frac{1}{\bar{\alpha}} \notin \mathbb{U}$.
   Si $z \in \mathbb{U}$, on a
$$|h(z)|^2 \;=\; |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\,\frac{|z|^2 + |\alpha|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})}{|\bar{\alpha}z|^2 + 1 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})} \;=\; \frac{1 + |\alpha|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})}{|\bar{\alpha}|^2 + 1 + 2\,\mathfrak{Re}(z\bar{\alpha})} \;=\; 1,$$
   car $|z| = 1$ et $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$.
   N.B. : on pouvait aussi remarquer que comme $|\bar{z}| = 1$, on a $|h(z)| = \frac{|z+\alpha|}{|\bar{\alpha}z+1|\,|\bar{z}|} = \frac{|z+\alpha|}{|\bar{\alpha}+\bar{z}|} = 1$ car $\overline{z+\alpha} = \bar{\alpha} + \bar{z}$.

6. *a.* Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, donc comme h vérifie $(\mathscr{P})$, on a $|ae^{i\theta}+b| = |ce^{i\theta}+d|$, donc $|ae^{i\theta}+b|^2 = |ce^{i\theta}+d|^2$. La question 4 donne alors :

$$|ae^{i\theta}|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(ae^{i\theta}\bar{b}) \;=\; |ce^{i\theta}|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(ce^{i\theta}\bar{d})$$

d'où $|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(a\bar{b}e^{i\theta}) \;=\; |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathfrak{Re}(c\bar{d}e^{i\theta})$.

b. On suppose que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $u + 2\,\mathfrak{Re}(ve^{i\theta}) \;=\; 0$.

En choisissant $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, puis $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ll} u + 2\,\mathfrak{Re}\,v = 0 & (1) \\ u - 2\,\mathfrak{Re}\,v = 0 & (2) \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{l} u + 2\,\mathfrak{Re}(iv) = 0 \\ u + 2\,\mathfrak{Re}(-iv) = 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{ll} u - 2\,\mathfrak{Im}\,v = 0 & (3) \\ u + 2\,\mathfrak{Im}\,v = 0 & (4) \end{array}\right.$$

En sommant (1) et (2), on déduit que $\mathfrak{Re}\,v = 0$. En sommant (3) et (4), on déduit que $\mathfrak{Im}\,v = 0$. Finalement, $v = 0$, donc $u = 0$.

La question précédente donne : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 - (|c|^2 + |d|^2) + 2\,\mathfrak{Re}((a\bar{b} - c\bar{d})e^{i\theta}) \;=\; 0$. En appliquant ce qui précède à $u = |a|^2 + |b|^2 - (|c|^2 + |d|^2)$ et $v = a\bar{b} - c\bar{d}$, on obtient $u = v = 0$, donc $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $a\bar{b} = c\bar{d}$.

c. Si $a = 0$, on a $c\bar{d} = 0$ d'après la question précédente. Comme $ad - bc \neq 0$, on a $bc \neq 0$, donc $c \neq 0$, ce qui entraîne que $d = 0$. Finalement, h est de la forme

$$h : z \mapsto \frac{b}{cz}$$

Comme $|b|^2 = |c|^2$, on a $\left|\frac{b}{c}\right| = 1$, donc $\frac{b}{c}$ s'écrit $e^{i\theta}$ pour un réel $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $h : z \mapsto \frac{e^{i\theta}}{z}$, et h est de type (1).

d. On a $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) \;=\; |a|^4 - |ad|^2 - |ca|^2 + |cd|^2$.

Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on a $|ab|^2 = |cd|^2$, donc

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) \;=\; |a|^4 - |ad|^2 - |ca|^2 + |ab|^2 \;=\; |a|^2(|a|^2 - |d|^2 - |c|^2 + |b|^2) \;=\; 0$$

d'après la question 6b.

e. Si $|a| = |c|$, alors $c + \neq 0$, et on a $\frac{a}{c} \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = ce^{i\theta}$. Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on en déduit que $c\bar{b}e^{i\theta} = c\bar{d}$. Comme $c \neq 0$, on a $b = de^{i\theta}$. Ansi, $ad - bc = ce^{i\theta}d - de^{i\theta}c = 0$. On en déduit que dans ce cas h n'est pas une homographie, donc ce cas est impossible.

f. Si $|a| = |d|$, alors comme ci-dessus il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{d} = e^{i\theta}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $cz + d \neq 0$,

$$h(z) \;=\; \frac{a}{d}\,\frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1} \;=\; e^{i\theta}\,\frac{z + \frac{b}{a}}{\frac{c}{d}z + 1}.$$

On pose $\alpha = \frac{b}{a}$. Comme $a\bar{b} = c\bar{d}$, on a alors $\frac{c}{d} = \frac{a\bar{b}}{d\bar{d}} = \frac{a\bar{b}}{|d|}$. L'égalité $a = \frac{|a|}{\bar{a}}$ donne ensuite $\frac{c}{d} = \frac{|a|}{|d|}\,\frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}} = \bar{\alpha}$.

Par ailleurs, on déduit aussi de $a\bar{b} = c\bar{d}$ que $|b| = |c|$, donc si $\alpha = \frac{b}{a} \in \mathbb{U}$, on a $|a| = |b| = |c|$, ce qui est impossible d'après la question précédente. On a donc bien montré que l'homographie h est de type (2).