DS 4

Corrigé

Exercice 1 – Triplets pythagoriciens

On dit que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ est un triplet pythagoricien s'il vérifie l'équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (\mathscr{P})$$

Nous cherchons dans cet exercice à déterminer tous les triplets pythagoriciens.

1. Donner un exemple simple de triplet pythagoricien.
2. On suppose dans un premier temps que $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ est un triplet pythagoricien *tel que x et y sont premiers entre eux.*
   a. Montrer que si $n, m \in \mathbb{N}^\star$ et $n^2 \mid m^2$, alors $n \mid m$.
   On pourra par exemple s'intéresser à $v_p(n)$ et $v_p(m)$, où p est un nombre premier.
   b. En déduire que z et y sont premiers entre eux. Que dire de z et x ?
   c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k^2 \equiv 0\,[4]$ ou $k^2 \equiv 1\,[4]$ (on pourra distinguer suivant la congruence de k modulo 4).
   d. En utilisant la question précédente, montrer que x et y n'ont pas la même parité, et préciser la parité de z.

   Dans toute la suite de la question 2, on suppose que x est pair et y impair. On note $x = 2a$ avec $a \in \mathbb{N}^\star$.

   e. Montrer qu'il existe $b, c \in \mathbb{N}^\star$ tels que
   $$\begin{cases} b + c = z, \\ b - c = y \end{cases}$$
   et en déduire que $a^2 = bc$.
   f. Montrer que b et c sont premiers entre eux.
   g. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^\star$ tels que $b = u^2$ et $c = v^2$.
   h. En déduire que $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ et $z = u^2 + v^2$.
3. On considère maintenant le cas général : soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ un triplet pythagoricien. On note $d = x \wedge y$.
   Justifier que $d \mid z$, et en se ramenant à la question 2, montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{N}^\star$ tels que
   $$\begin{cases} x = 2duv \\ y = d\,(u^2 - v^2) \\ z = d\,(u^2 + v^2) \end{cases} \qquad (1)$$
4. Réciproquement, montrer que tout triplet (x, y, z) vérifiant (1) avec $d, u, v \in \mathbb{N}^\star$ et $u > v$, est solution de $(\mathscr{P})$.
   Conclure, et donner un autre exemple de triplet pythagoricien.

---

1. Le triplet $(3, 4, 5)$ est solution.
2. *a.* Soit p un nombre premier. On a $n^2 \mid m^2$ donc $v_p(n^2) \leqslant v_p(m^2)$. Or $v_p(n^2) = 2v_p(n)$ et $v_p(m^2) = 2v_p(m)$. On a donc $v_p(n) \leqslant v_p(m)$. Cela implique $n \mid m$.
   b. Soit d un diviseur commun de z et y. Alors $d^2 \mid x^2$ et $d^2 \mid z^2$. On en déduit que $d^2 \mid z^2 - y^2$, donc $d^2 \mid x^2$. Par la question précédente, on a $d \mid x$. Ainsi, d est un diviseur commun de x et y, et $d \in \{-1, 1\}$. On en déduit que z et y sont premiers entre eux. On montre de même manière que x et z sont aussi premiers entre eux.
   c. Soit $k \in \mathbb{Z}$,
   – si $k \equiv 0\,[4]$, alors $k^2 \equiv 0\,[4]$,
   – si $k \equiv 1\,[4]$, alors $k^2 \equiv 1\,[4]$,
   – si $k \equiv 2\,[4]$, alors $k^2 \equiv 4 \equiv 0\,[4]$,

– si $k \equiv 3\,[4]$, alors $k^2 \equiv 9 \equiv 1\,[4]$.

Ainsi, dans tous les cas, $k^2 \equiv 0\,[4]$ ou $k^2 \equiv 1\,[4]$.

d. Comme x et y sont premiers entre eux, ils ne peuvent être tous deux pairs. Par ailleurs, si on suppose qu'ils sont tous deux impairs, alors d'après la question précédente, $x^2 + y^2 \equiv 2\,[4]$, donc $z^2 \equiv 2\,[4]$, ce qui est impossible d'après la question précédente.

Comme x et y n'ont pas même parité, l'un est pair et l'autre impair. Supposons que x est pair et y impair. Alors on a $x^2 \equiv 0\,[4]$ et $y^2 \equiv 1\,[4]$, donc $x^2 + y^2 \equiv 1\,[4]$, et $z^2 \equiv 1\,[4]$. De même si x est impair et y est pair.

Ceci assure que z est impair, toujours d'après la question précédente.

e. On remarque que

$$\begin{cases} b + c = z \\ b - c = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = z + y \\ 2c = z - y \end{cases}$$

Or y et z sont impairs, donc $z+y$ et $z-y$ sont pairs. Il existe donc bien $b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $z+y = 2b$ et $z-y = 2c$.

On a par ailleurs $z^2 = x^2 + y^2 > y^2$ donc $z > y$, et $z - y > 0$. On a aussi $z + y > 0$. Ceci entraîne que $b, c \in \mathbb{N}^\star$.

On a ensuite $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 4bc$, donc $4a^2 = 4bc$, puis $a^2 = bc$.

f. Si d est un diviseur commun à b et c, alors $d \mid b + c$ et $d \mid b - c$, donc $d \mid z$ et $d \mid y$. Comme z et y sont premiers entre eux, on a alors $d \in \{-1, 1\}$. Par conséquent, b et c sont premiers entre eux.

On pouvait aussi exploiter une relation de Bézout liant z et y pour en obtenir une liant b et c.

g. On note $p_1, \ldots, p_r$ les facteurs premiers de a. Pour tout i, comme $p_i \mid bc$, on a $p_i | b$ ou $p_i \mid c$ par le lemme d'Euclide, et on ne peut avoir les deux car $b \wedge c = 1$. On peut donc séparer les diviseurs premiers en deux ensembles disjoints : ceux qui divisent b et ceux qui divisent c.

Quitte à réordonner, on peut supposer que $p_1, \ldots, p_k$ divisent b, et $p_{k+1}, \ldots, p_r$ divisent c. Ce sont les seuls diviseurs premiers de b et c (car tout autre diviseur premier diviserait aussi a). Par ailleurs, pour tout i, si on note $\alpha_i = v_{p_i(a)}$, on a

$$v_{p_i}(a^2) = v_{p_i}(b) + v_{p_i}(c), \quad \text{donc} \quad 2\alpha_i = v_{p_i}(b) + v_{p_i}(c).$$

Ainsi, si $i \in [\![1, k]\!]$, on a $v_{p_i}(b) = 2\alpha_i$, et si $i \in [\![k + 1, r]\!]$, on a $v_{p_i}(c) = 2\alpha_i$. Finalement,

$$b = p_1^{2\alpha_1} \ldots p_k^{2\alpha_k} = (p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})^2, \quad \text{et} \quad c = p_{k+1}^{2\alpha_{k+1}} \ldots p_r^{2\alpha_r} = \left(p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \ldots p_r^{\alpha_r}\right)^2.$$

D'où le résultat en posant $u = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ et $v = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

h. On a $a^2 = bc = (uv)^2$, donc comme $x^2 = 4a^2 = 4(uv)^2$, on a $x = 2uv$. Par ailleurs, $y = b - c = u^2 - v^2$ et $z = b + c = u^2 + v^2$.

3. Comme $d \mid x$ et $d \mid y$, on a $d^2 \mid x^2 + y^2$, et $d^2 \mid z^2$. Par la question 2a, on a alors $d \mid z$, et on peut noter $z = dz'$ avec $z' \in \mathbb{N}^\star$. Comme $d = x \wedge y$, il existe par ailleurs x', y' tels que $x = dx'$, $y = dy'$ et $x' \wedge y' = 1$. Ainsi, en divisant l'équation par d^2, on obtient $x'^2 + y'^2 = z'^2$.

   D'après la question précédente, comme $x' \wedge y' = 1$, on a l'existence de $u, v \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x' = 2uv$, $y' = u^2 - v^2$ et $z' = u^2 + v^2$. En multipliant par d, ceci donne exactement (1).

4. Simple vérification. L'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble constitué des triplets de la forme précédente ou obtenu en échangeant l'ordre des deux premiers nombres.

   Le triplet de la question 1 correspond aux choix $d = 1$, $u = 2$ et $v = 1$. En choisissant $d = 1$, $u = 3$ et $v = 2$, on obtient le triplet pythagoricien $(12, 5, 13)$.

Exercice 2 – Exponentielle de matrice

Dans cet exercice, on cherche à donner un sens à l'exponentielle d'une matrice carrée dans certains cas. Pour ce faire, on s'appuie sur une égalité qui caractérise l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Si $p \in \mathbb{N}^\star$, on dira dans cet exercice qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ si elle converge coefficient par coefficient vers M, c'est-à-dire :

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!], \quad (M_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M_{i,j}, \tag{L}$$

où $(M_n)_{i,j}$ et $M_{i,j}$ désigne les coefficients respectifs de M_n et M à la ligne i et colonne j.

Cas de $\mathbb{R}$

1. On considère la fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ définie sur $]-1, +\infty[$.

a. Justifier que $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$.

b. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$$

Dans toute la suite, si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on définit, lorsque la limite existe,
$$E(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n. \tag{2}$$

Cas de $\mathscr{A}_2(\mathbb{R})$

On considère une matrice $A \in \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$, qu'on note
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe $\beta_n \in \mathbb{R}_+^\star$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tels que
$$\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \beta_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix},$$
et que ces réels vérifient : $\beta_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}$ et $\theta_n = \arctan \frac{\alpha}{n}$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta_n) & -\sin(k\theta_n) \\ \sin(k\theta_n) & \cos(k\theta_n) \end{pmatrix}.$$
4. *a.* Donner la valeur de $\arctan 0$, puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n$, au sens défini en (L).
5. *a.* Montrer que $n \ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n^n$.
6. En déduire que $E(A)$ existe[1], et donner son expression en fonction de α.

Cas des matrices diagonalisables

7. *Cas des matrices diagonales.* On considère une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$
Montrer que $E(D)$ existe, et donner son expression en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
8. Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{D}_p(\mathbb{R})$ telles que
$$A = PDP^{-1}.$$
Montrer que $E(A)$ existe et donner son expression en fonction de P, P^{-1} et $E(D)$.

1. Voir (2).

1. *a.* La fonction f est dérivable en 0 comme composée car $t \mapsto 1+t$ est dérivable en 0 et ln est dérivable en 1. On a alors
$$\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(0)}{t-0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = 1.$$
b. Si $x \in \mathbb{R}^\star$, comme $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a par composition de limites
$$\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{donc} \quad \frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{et} \quad n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$
Si $x=0$, le résultat est clairement encore vrai.

c. On déduit de la question précédente par continuité de exp en x que
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x.$$

2. Si $\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right) = \beta_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix} = \beta_n \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} \beta_n\cos\theta_n = 1 \\ \beta_n\sin\theta_n = \frac{\alpha}{n} \end{cases}$

Comme $\cos^2\theta_n + \sin^2\beta_n = 1$, ceci entraîne que $\beta_n^2 = 1 + \dfrac{\alpha^2}{n^2}$ donc $\beta_n = \sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{n^2}}$, car $\beta_n \in \mathbb{R}_+^\star$.

On a $\cos\theta_n > 0$ donc $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et
$$\tan\theta_n = \frac{\beta_n\sin\theta_n}{\beta_n\cos\theta_n} = \frac{\alpha}{n}, \quad \text{donc} \quad \theta_n = \arctan\frac{\alpha}{n}.$$
Justifions maintenant l'existence :
$$\text{si } \beta_n = \sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}, \text{ alors } \frac{1}{\beta_n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2\beta_n^2} = 1, \text{ et en posant } z_n = \frac{1}{\beta_n} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{n\beta_n}, \text{ on a } |z_n| = 1.$$
Par conséquent, il existe $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ tel que $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$. On a alors $\cos\theta_n = \frac{1}{\beta_n}$ et $\sin\theta_n = \frac{\alpha}{n\beta_n}$, et l'égalité est bien vérifiée.

3. Montrons le résultat par récurrence sur k.
   - Si $k=0$, on a $\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^k = I_2$. Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, le résultat est vrai.
   - Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai pour l'entier k. On a alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k\theta_n) & -\sin(k\theta_n) \\ \sin(k\theta_n) & \cos(k\theta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(k\theta_n)\cos\theta_n - \sin(k\theta_n)\sin\theta_n & -\cos(k\theta_n)\sin\theta_n - \sin(k\theta_n)\cos\theta_n \\ \cos(k\theta_n)\sin\theta_n + \sin(k\theta_n)\cos\theta_n & \cos(k\theta_n)\cos\theta_n - \sin(k\theta_n)\sin\theta_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta_n) & -\sin((k+1)\theta_n) \\ \sin((k+1)\theta_n) & \cos((k+1)\theta_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le résultat est donc bien montré par récurrence.

4. *a.* On a $\arctan 0 = 0$. Comme arctan est dérivable en 0, on a
$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$
b. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a si $\alpha \in \mathbb{R}^\star$,
$$n\theta_n = n\arctan\frac{\alpha}{n} = \alpha\,\frac{\arctan\frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha,$$
par composition de limites, car $\frac{\alpha}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, par continuité de cos et sin, on a $\cos(n\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos\alpha$ et $\sin(n\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\alpha$. Le résultat est toujours vrai pour $\alpha = 0$. Par conséquent,
$$\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5. *a.* On a
$$n\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \;=\; \frac{1}{n}\,n^2\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
car $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^2\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha^2$ d'après 1b [a].

b. On a
$$\beta_n^n \;=\; \mathrm{e}^{n\ln\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{n^2}}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 \;=\; 1$$
d'après la question précédente, par continuité de la fonction exp.

6. D'après ce qui précède, on a
$$\left(I_2+\frac{1}{n}A\right)^n \;=\; \beta_n^n\begin{pmatrix}\cos\theta_n & -\sin\theta_n\\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\end{pmatrix}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

7. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$
$$\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^n = \begin{pmatrix}1+\frac{\lambda_1}{n} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1+\frac{\lambda_p}{n}\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}\left(1+\frac{\lambda_1}{n}\right)^n & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \left(1+\frac{\lambda_p}{n}\right)^n\end{pmatrix}$$
car d'après le cours, pour tous réels $\mu_1,\dots,\mu_p$, on a $\mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_p)^n = \mathrm{Diag}(\mu_1^n,\dots,\mu_p^n)$. En utilisant la question 1, on a pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\left(1+\frac{\lambda_1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\lambda^i}$. Ceci entraîne, puisqu'on a convergence coefficient par coefficient,
$$\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_p}\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E(D) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_p}\end{pmatrix}.$$

8. On remarque que $I_p+\frac{1}{n}A \;=\; I_p+\frac{1}{n}P^{-1}DP \;=\; P^{-1}\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)P$.
Montrons plus généralement par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a
$$\mathscr{P}(k)\ :\ \left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^k \;=\; P^{-1}\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^kP.$$

– Comme $P^{-1}P = I_p = \left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^0$, on obtient que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
– Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors,
$$\begin{aligned}\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^{k+1} = \left(I_p+\frac{1}{n}A\right)\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)^k &= P^{-1}\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)PP^{-1}\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^kP\\ &= P^{-1}\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^{k+1}P.\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

On sait d'après la question précédente que $E(D)$ existe car D est diagonale : $\left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(D)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $M_n = \left(I_p+\frac{1}{n}D\right)^n$. D'après ce qui précède, $(M_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(D)_{i,j}$ pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$.

Pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$, on a donc :
$$\left(I_p+\frac{1}{n}A\right)_{i,j} \;=\; \sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p (P^{-1})_{i,k}(M_n)_{k,l}P_{l,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p (P^{-1})_{i,k}E(D)_{k,l}P_{l,j} \;=\; (P^{-1}E(D)P)_{i,j}.$$

Ceci montre que $E(A)$ existe, et $E(A) \;=\; P^{-1}E(D)P$.

a. $\left(n^2\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n^2}\right)\right)_n$ est une sous-suite de $\left(n\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{n}\right)\right)_n$.