DS 5

Corrigé

Exercice 1 – Un sous-anneau de $\mathbb{Q}$

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n}{2k+1},\ n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. *a.* Soient $n, k \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq 0$. Montrer :

$$\frac{2k+1}{n} \in A \Rightarrow n \text{ est impair.}$$

   b. En déduire que $x \in A$ est inversible dans A si et seulement s'il est de la forme

$$x = \frac{n}{2k+1}, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } n \text{ entier impair.}$$

1. Montrons que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   – En choisissant $n = 1$ et $k = 0$, on constate qu'on a $1 = \frac{n}{2k+1} \in A$.
   – On considère deux éléments $x, y \in A$, que l'on peut donc noter $x = \frac{n}{2k+1}$ et $y = \frac{m}{2l+1}$, avec $n, m, k, l \in \mathbb{Z}$. On a

$$x - y = \frac{n}{2k+1} - \frac{m}{2l+1} = \frac{n(2l+1) + m(2k+1)}{(2k+1)(2l+1)} \in A, \quad \text{et} \quad xy = \frac{nm}{(2k+1)(2l+1)} \in A,$$

   car $(2k+1)(2l+1)$ est impair : $(2k+1)(2l+1) \equiv 1\,[2]$. Ainsi, A est stable par différence et par produit.
2. *a.* Supposons que $\frac{2k+1}{n} \in A$, il existe alors $m, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{2k+1}{n} = \frac{m}{2l+1}, \quad \text{donc} \quad nm = (2k+1)(2l+1).$$

   On en déduit que nm est impair. On en déduit que n est impair (si n était pair, nm le serait également).

   b. Soit $x \in A$, noté $x = \frac{n}{2k+1}$ avec $n, k \in \mathbb{Z}$.
   Si x est inversible dans A, il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{x}$. Ainsi, on a $\frac{1}{x} = \frac{2k+1}{n} \in A$, donc n est impair par la question précédente.
   Réciproquement, si n est impair, alors $n \neq 0$, et $\frac{2k+1}{n} \in A$. Comme $x\,\frac{2k+1}{n} = 1$, x est inversible dans A.

Exercice 2 – Convolution de suites

Dans cet exercice, on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On rappelle que E est muni de l'addition des suites : si $u, v \in E$, la suite $u + v$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)_n = u_n + v_n.$$

On munit par ailleurs E de la loi interne notée $\star$ définie de la manière suivante : si $u, v \in E$, la suite $u \star v \in E$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

1. Rappeler la définition de la commutativité pour la loi $\star$, et montrer que $\star$ est commutative.

2. On considère la suite e définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$
Pour $u \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $(e \star u)_n$. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que $\star$ est distributive par rapport à $+$.
4. Rappeler la définition de l'associativité pour la la loi $\star$, et montrer que $\star$ est associative.
5. Quelle est la structure algébrique de $(E, +, \star)$? Justifier.
6. Quels sont les inversibles de E ?

1. La loi $\star$ est commutative si et seulement si pour toutes suites $u, v \in E$, on a $u \star v = v \star u$.
Soient $u, v \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \overset{k'=n-k}{=} \sum_{k'=0}^{n} u_{n-k'} v_{k'} = (v \star u)_n.$$
Ainsi, $u \star v = v \star u$.
2. Soient $u \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(e \star u)_n = \sum_{k=0}^{n} e_k u_{n-k} = e_0 u_n + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{e_k}_{=0} u_{n-k} = u_n.$$
On a donc $e \star u = u$, et, par commutativité, $u \star e = u$. Par conséquent, e est élément neutre pour la loi $\star$.
3. Soient $u, v, w \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(u \star (v + w))_n = \sum_{k=0}^{n} u_k (v_{n-k} + w_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} u_k w_{n-k} = (u \star v)_n + (v \star u)_n = (u \star v + u \star w)_n.$$
Ainsi, $u \star (v + w) = u \star v + u \star w$. La distributivité à droite en découle par commutativité.
4. La loi $\star$ est associative si et seulement si pour toutes suites $u, v, w \in E$, on a $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$.
Soient $u, v, w \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$((u \star v) \star w)_n = \sum_{k=0}^{n} (u \star v)_k w_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} u_l v_{k-l} \right) w_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} u_l v_{k-l} w_{n-k}.$$
Par ailleurs,
$$(u \star (v \star w))_n = \sum_{k=0}^{n} u_k (v \star w)_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{l=0}^{n-k} v_l w_{n-k-l} \overset{l'=k+l}{=} \sum_{k=0}^{n} u_k \sum_{l'=k}^{n} v_{l'-k} w_{n-l'} = \sum_{l'=0}^{n} \sum_{k=0}^{l'} u_k v_{l'-k} w_{n-l'}.$$
en faisant une interversion dans la dernière somme double triangulaire. On observe que, les variables étant muettes, les deux sommes doubles obtenues sont les mêmes, c'est-à-dire $((u \star v) \star w)_n = (u \star (v \star w))_n$.
5. D'après le cours, $(E, +)$ est un groupe abélien : il s'agit du groupe $(\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}), +)$, l'élément neutre étant la suite nulle, et $-u$ l'inverse de $u \in E$ pour la loi $+$. Comme on a vu que $\star$ est associative, commutative, distributive par rapport à $+$ et a un élément neutre, on a donc montré que $(E, +, \star)$ est un anneau commutatif.
6. Si u est inversible dans E, alors il existe $v \in E$ telle que $u \star v = e$.
   - En particulier, $(u \star v)_0 = u_0 v_0 = 1$, donc $u_0 \neq 0$, et $v_0 = \frac{1}{u_0}$.
   - Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(u \star v)_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = 0$. Ainsi, $v_n = -\frac{1}{u_0}(u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$.

   Réciproquement, supposons que $u_0 \neq 0$, et considérons la suite v définie par récurrence par $v_0 = \frac{1}{u_0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n = -\frac{1}{u_0}(u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0)$, et montrons que $u \star v = e$.
   - On a $u_0 v_0 = 1$, donc $(u \star v)_0 = e_0 = 1$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $(u \star v)_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots u_n v_0 = u_0 v_n - u_0 v_n = 0 = e_n$.

   Finalement, on a bien $u \star v = e$, donc on a aussi $v \star u = e$, et u est inversible dans E.

Exercice 3 – Inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

On considère
$$A = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. *a.* Montrer que pour tout $x \in A$, il existe un *unique* couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
   Dans toute la suite, pour tout $x \in A$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, on note
   $$\bar{x} = a - b\sqrt{2}, \quad \text{et} \quad N(x) = x\bar{x}.$$
   b. Pour tout $x \in A$, exprimer $N(x)$ en fonction de $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$, et justifier que $N(x) \in \mathbb{Z}$.
   c. Montrer que pour tous $x, y \in A$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. Montrer que $x \in A$ est inversible dans A si et seulement si $N(x) \in \{-1, 1\}$.

On note :
- $A^\times$ l'ensemble des inversibles de A,
- $A_1^\times = A^\times \cap]1, +\infty[$ l'ensemble des inversibles x de A tels que $x > 1$.

4. *a.* Montrer que si $x \in A_1^\times$, alors $-1 \leqslant \bar{x} \leqslant 1$.
   b. En déduire que $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ est le plus petit élément de $A_1^\times$.
5. Montrer que si $x \in A_1^\times$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$.
6. En déduire que $A_1^\times = \{\alpha^n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$.
7. Déterminer l'ensemble $A^\times$.

---

1. Montrons que A est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
   – En choisissant $a = 1$ et $b = 0$, on constate que $1 = a + b\sqrt{2} \in A$.
   – Si $x, y \in A$, on peut écrire $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = a' + b'\sqrt{2}$, avec $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$. On a alors
   $$x - y = \underbrace{a - a'}_{\in\mathbb{Z}} + (\underbrace{b - b'}_{\in\mathbb{Z}})\sqrt{2} \in A, \quad \text{et} \quad ab = \underbrace{aa' + 2bb'}_{\in\mathbb{Z}} + (\underbrace{ab' + a'b}_{\in\mathbb{Z}})\sqrt{2} \in A.$$
   Ainsi, A est stable par différence et par produit.
2. *a.* Supposons que $x \in A$ s'écrive $x = a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. On a alors $a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$. Ainsi, si $b \neq b'$, on a $\sqrt{2} = \frac{a-a'}{b'-b} \in \mathbb{Q}$, et il y a contradiction. On a alors $b = b'$, puis $a = a'$, d'où l'unicité.
   b. Pour $x \in A$, si $x = a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors on a $N(x) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2 \in \mathbb{Z}$.
   c. On considère $x, y \in A$, qu'on écrit $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = a' + b'\sqrt{2}$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$. On a alors
   $$N(x)N(y) = (a^2 - 2b^2)(a'^2 - 2b'^2) = (aa')^2 - 2(ab')^2 - 2'a'b)^2 + 4(bb')^2.$$
   $$\begin{aligned} \text{Donc} \quad N(xy) = N\big(aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2}\big) &= (aa' + 2bb')^2 - 2(ab' + a'b)^2 \\ &= (aa')^2 + 4aa'bb' + 4(bb')^2 - 2(ab')^2 - 4aa'bb' - 2(a'b)^2 \\ &= N(x)N(y). \end{aligned}$$
3. Si $x \in A$ est inversible, alors il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$, donc $N(x)N(y) = N(xy) = N(1) = 1$. Par conséquent, $N(x)$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, et $N(x) \in \{-1, 1\}$.
   Réciproquement, supposons $N(x) \in \{-1, 1\}$. Si $N(x) = 1$, alors $x\bar{x} = 1$, et comme $\bar{x} \in A$, x est inversible d'inverse $\bar{x}$. De même, si $N(x) = -1$, alors $x\bar{x} = -1$, donc $x(-\bar{x}) = 1$, et x inversible dans A, d'inverse $-\bar{x}$.
4. *a.* Si $x \in A_1^\times$, on a $|x\bar{x}| = |N(x)| = 1$, donc $|\bar{x}| = \frac{1}{|x|} < 1$, du fait que $|x| = x > 1$. On a bien $-1 < \bar{x} < 1$.
   b. Déjà, $1 + \sqrt{2} > 1$ et $N(1 + \sqrt{2}) = -1$ donc $1 + \sqrt{2} \in A_1^\times$.
   Ensuite, on considère $x \in A_1^\times$ et on note $x = a + b\sqrt{2}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$, de sorte que $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$.
   – Comme $x > 1$ et $\bar{x} > -1$, on a
   $$\begin{cases} a + b\sqrt{2} > 1 \\ a - b\sqrt{2} > -1 \end{cases}$$
   En additionnant, on trouve $2a > 0$, donc $a > 0$.
   – Comme $a - b\sqrt{2} < 1$, on a $-a + b\sqrt{2} > -1$, donc
   $$\begin{cases} a + b\sqrt{2} > 1 \\ -a + b\sqrt{2} > -1 \end{cases}$$

En additionnant, on trouve $2b\sqrt{2} > 0$, donc $b > 0$.

Comme $a, b \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, ce qui donne $x = a + b\sqrt{2} \geqslant 1 + \sqrt{2}$. On a donc bien montré que $1 + \sqrt{2}$ est le plus petit élément de $A_1^\times$.

5. On remarque que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$ se récrit $\ln(\alpha^n) \leqslant \ln x < \ln(\alpha^{n+1})$ par stricte croissance de ln, ou encore $n \ln \alpha \leqslant \ln x < (n+1)\ln \alpha$. Comme $\alpha > 1$, on a $\ln \alpha > 0$, donc l'inégalité se récrit encore :
$$n \leqslant \frac{\ln x}{\ln \alpha} < n+1, \quad \text{donc en posant } n = \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln \alpha} \right\rfloor, \text{ on a bien l'inégalité.}$$
Par ailleurs, $n \geqslant 1$ car $x \geqslant \alpha$, donc $\ln x \geqslant \ln \alpha$.

On peut aussi remarquer que $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n,\ \alpha^k > x$, donc il existe N tel que $\forall k > N,\ \alpha^k > x$.

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{N} = \{k \in \mathbb{N},\ \alpha^k \leqslant x\}$ est borné par N et non vide car il contient 0, donc on peut poser $n = \max \mathcal{N}$, ce sorte que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$.

6. Tout d'abord, comme $(A^\times, \times)$ est un groupe, on a $\alpha^n \in A^\times$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\alpha^n \geqslant \alpha > 1$, donc $\alpha^n \in A_1^\times$. On a montré $\{\alpha^n,\ n \in \mathbb{N}^\star\} \subset A_1^\times$.

Si $x \in A_1^\times$, on considère $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$, dont l'existence est assurée par la question précédente. Par conséquent, on a
$$1 \leqslant x\alpha^{-n} < \alpha.$$
Comme x et α^{-n} sont inversibles, $x\alpha^{-n}$ l'est aussi. Comme $x\alpha^n < \alpha = \min A_1^\times$, on en déduit alors que $x\alpha^{-n} \notin A_1^\times$, donc $x\alpha^{-n} \leqslant 1$. Finalement, $x\alpha^{-n} = 1$, ce qui donne $x = \alpha^n$, puis $x \in \{\alpha^n,\ n \in \mathbb{N}^\star\}$, d'où l'autre inclusion.

7. On note $I = \{\pm\alpha^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Comme $A^\times$ est un groupe, les nombres de la forme α^n ou $-\alpha^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont inversibles dans A, donc $I \subset A^\times$.

Réciproquement, si $x \in A^\times$,
   - si $x \in]1, +\infty[$, on a vu que $x \in I$, si $x = 1$, c'est bien sûr le cas également,
   - si $x \in]0, 1[$, alors $\frac{1}{x} \in]1, +\infty$, donc on peut écrire $\frac{1}{x} = \alpha^n$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, donc $x = \alpha^{-n} \in I$,
   - si $x \in]-\infty, 0[$, alors $-x \in]0, +\infty[$, donc on vient de voir qu'on peut écrire $x = \alpha^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc $x = -\alpha^n \in I$.

Exercice 4 – Interpolation de Lagrange et polynômes de Hilbert

À l'exception de la question 4, les deux parties sont indépendantes.

Partie I – Interpolation de Lagrange

Dans cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$. On cherche à montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = y_j. \tag{1}$$

1. *Unicité.* On suppose que $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ sont deux polynômes tels que
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = Q(x_j) = y_j.$$
   a. On note $R = P - Q$. Montrer que $R \in \mathbb{K}_n[X]$.

   b. Conclure à l'unicité.

2. *Existence.* Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose
$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$
À titre d'exemple, si $n = 2$, on a défini $L_0 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$, $L_1 = \frac{(X-x_0)(X-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $L_2 = \frac{(X-x_0)(X-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$.

   a. Justifier que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_i est de degré n.

   b. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, calculer $L_i(x_i)$. Pour $j \in [\![0, n]\!]$ tel que $i \neq j$, calculer $L_i(x_j)$.

   c. En déduire que si $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$, alors P vérifie (1).

3. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$$

Partie II – Polynômes stabilisant $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$

On s'intéresse dans cette partie aux polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ stabilisant un ensemble $K \subset \mathbb{C}$, c'est-à-dire que

$$\forall x \in K,\ P(x) \in K.$$

On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. *Cas* $K = \mathbb{Q}$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$(\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}) \iff P \in \mathbb{Q}[X].$$

On pourra appliquer la question 3 à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ en choisissant $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ \ldots, x_n = n$.

5. *Cas* $K = \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$H_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \frac{X(X-1)\ldots(X-k+1)}{k!}.$$

On note par ailleurs $H_0 = 1$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant n \leqslant k-1 \\ \dbinom{n}{k} & \text{si } n \geqslant k \\ (-1)^k\dbinom{k-n-1}{-n-1} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \geqslant k$,

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On pourra par exemple raisonner par récurrence.

c. En déduire que pour tous $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} H_k(i) = H_{k+1}(n+1).$$

d. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, et

$$Q = P(X+1) - P(X).$$

Exprimer $\deg P$ en fonction de $\deg Q$.

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $P(k) - P(0)$ en fonction de $Q(0), \ldots, Q(k-1)$.

f. Montrer que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}$ sont exactement les polynômes de la forme

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$.

On pourra raisonner par récurrence sur le degré de P.

1. *a.* On a $\deg(P-Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) \leqslant n$, car $\deg P \leqslant n$ et $\deg Q \leqslant n$. Ainsi, $P - Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

   b. Comme $P(x_i) = Q(x_i)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynômes $R = P - Q$ a pour racines $x_0, \ldots, x_n$ qui sont deux à deux distincts. Ainsi, R est un polynôme de degré au plus n qui a $n+1$ racines, il est donc nul. On a bien montré que $P = Q$, d'où l'unicité.

2. *a.* Le polynôme L_i est un produit de n polynômes de degré 1, il est donc de degré n.

   b. On a $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$.

   c. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On a
$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j L_j(x_j) = y_j.$$

3. Le polynôme $Q = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$ appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ comme somme de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, et vérifie $Q(x_j) = P(x_j)$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$. Comme nous avons montré l'unicité d'un tel polynôme, ceci entraîne que $P = Q$.

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$. Si P est nul, on a $P \in \mathbb{Q}[X]$. Sinon, on note $n = \deg P$, et on choisit $x_j = j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a
$$P = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i, \quad \text{et pour tout } i \in [\![0, n]\!], \quad L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - k}{i - k} \in \mathbb{Q}[X], \quad \text{donc } P \in \mathbb{Q}[X].$$
Réciproquement, si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$, alors pour tout $x \in \mathbb{Q}$, on a $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Q}$.

5. *a.* Si $0 \leqslant n \leqslant k - 1$, alors n est racine de $X(X-1)\dots(X-n)\dots(X-k+1)$, donc $H_k(n) = 0$.

   Si $n \geqslant k$, $H_k(n) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

   Si $n < 0$, on pose $m = -n > 0$, on a alors
$$H_k(n) = H_k(-m) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(-m-i) = \frac{(-1)^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(m+i) = (-1)^k \frac{(m+k-1)\dots m}{k!} = (-1)^k \frac{(m-k)!}{k!(m-1)!}.$$
   Ainsi, $H_k(n) = (-1)^k \binom{m+k-1}{m-1} = (-1)^k \binom{k-n-1}{-n-1}$.

   b. On fixe $k \in \mathbb{N}$, et on raisonne par récurrence sur n.
   - Si $n = k$, on a $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
   - Soit $n \geqslant k$. On suppose que $\sum\limits_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, on a alors
$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1},$$
   par la relation de Pascal. Ceci achève la récurrence.

   c. Soient $k, n \in \mathbb{N}$.
   - Si $n < k$, alors pour tout $i \leqslant n$, on a $i < k$, donc $H_k(i) = 0$. Comme $\binom{n+1}{k+1} = 0$, l'égalité est vraie.
   - Si $n \geqslant k$, on sait que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $H_k(i) = \binom{i}{k}$ si $i \geqslant k$, et $H_k(i) = 0$ sinon
$$\sum_{i=0}^{n} H_k(i) = \sum_{i=k}^{n} H_k(i) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1} = H_k(n+1)$$
   d'après les questions précédentes.

   d. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $n = \deg P \geqslant 1$. On peut alors écrire $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \widehat{P}$, avec $\widehat{P} \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$. Ainsi,
$$\begin{aligned} Q &= a_n (X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \widehat{P}(X+1) - a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \widehat{P}(X) \\ &= a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1} X^{n-1} + -a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} + \widehat{Q}(X) \end{aligned}$$
   où $\widehat{Q}$ est un polynôme de degré au plus $n-2$, d'après la formule du binôme de Newton, et car on a $\deg \widehat{P}(X+1) - \widehat{P}(x) \leqslant \max(\deg \widehat{P}(X+1), \widehat{P}) \leqslant n+2$. Ainsi, comme $Q = n a_n X^{n-1} + \widehat{Q}$ et $n a_n \neq 0$, on a $\deg Q = n - 1 = \deg P - 1$.

   e. Par télescopage, on a pour $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$P(k) - P(0) = \sum_{j=0}^{k-1} P(j+1) - P(j) = \sum_{j=0}^{k-1} Q(j).$$

f. Déjà, on sait par la question 5a que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\forall m \in \mathbb{Z},\ H_i(m) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, si P est de la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i H_i$, on a aussi $\forall m \in \mathbb{Z},\ P(m) \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si P de degré $n \in \mathbb{N}$ vérifie : $\forall m \in \mathbb{Z},\ P(m) \in \mathbb{Z}$, on montre par récurrence sur n que P est de la forme ci-dessus.

– Si $n = 0$, le polynôme P est constant, donc $P = a_0 \in \mathbb{Z}$, et $P = a_0 H_0$.

– Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que tout polynôme Q de degré n tel que $\forall m \in \mathbb{Z},\ Q(m) \in \mathbb{Z}$ s'écrit $\sum_{i=0}^{n} a_i H_i$ avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, et on considère un polynôme P de degré $n+1$ tel que $\forall m \in \mathbb{Z},\ P(m) \in \mathbb{Z}$.

  On a vu qu'alors $Q = P(X+1) - P(X) \in \mathbb{C}_n[X]$, et, par hypothèse de récurrence, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i H_i$. En utilisant la question précédente, on a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$P(k) - P(0) \;=\; \sum_{j=0}^{k-1} Q(j) \;=\; \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} a_i H_i(j) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{k-1} H_i(j) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i H_{i+1}(k),$$

  d'après 5c. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $P(k) = P(0)H_0 + \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_{i-1} H_i$, et le polynôme $P - P(0)H_0 + \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_{i-1} H_i$ a une infinité de racines, donc il est nul. Ainsi,

$$P \;=\; P(0)H_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} H_i, \quad \text{ce qui conclut.}$$