

Interrogation de cours – 11

Corrigé

1. Énoncer le théorème de caractérisation des sous-anneaux d'un anneau A : si $B \subset A$, alors

B est un sous-anneau de $A \Leftrightarrow \dots$

$$B \text{ est un sous-anneau de } A \Leftrightarrow \begin{cases} 1_A \in B \\ \forall x, y \in B, x - y \in B \\ \forall x, y \in B, xy \in B \end{cases}$$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, donnés par $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$. Donner l'expression de PQ .

$$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} X^k.$$

3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Donner des relations entre :
- $\deg(P + Q)$ et $\deg P, \deg Q$,
 - $\deg(PQ)$ et $\deg P, \deg Q$,
 - $\deg(P \circ Q)$ et $\deg P, \deg Q$ en précisant les hypothèses.

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- Si $\deg Q \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$.

4. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Si $Q, R \in \mathbb{K}[X]$, alors $A = BQ + R$ est la division euclidienne de A par B si et seulement si ...

$$\deg R < \deg B.$$

5. Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 3X^2 - X + 1$ par $X + 2$.

$$X^3 + 3X^2 - X + 1 = (X + 2)(X^2 + X - 3) + 7.$$