

Interrogation de cours – 12

Corrigé

1. Écrire la formule de Leibniz.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

2. Énoncer le théorème de Rolle.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$, alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- a. Si $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ...

Si $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $0_E \in F$, et F est stable par combinaison linéaire : $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$.

- b. Si $A \subset E$, $\text{Vect}(A)$ est ...

$\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A .

5. Expliciter le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ donné par $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{T}_2^+(\mathbb{K}). \end{aligned}$$