

Interrogation de cours – 14

Corrigé

1. Donner :

- a. le $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$,
- b. le $DL_5(0)$ de $\sin x$
- c. le $DL_3(0)$ de $\tan x$,
- d. le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$.

$$a. \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

$$b. \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

$$c. \tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

$$d. \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

2. Donner le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) (1 + x + x^2 + o(x^2)) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

3. À l'aide d'un calcul de développement limité, déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de

$$u_n = e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}.$$

On a $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$, donc on obtient avec $u = \frac{2}{n}$:

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.

4. Donner le $DL_4(0)$ de $\sqrt{\cos x}$.

On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad \text{or} \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

En posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, donc

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x} &= 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{8} \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4) .\end{aligned}$$