Interrogation de cours – 6

Corrigé

1. Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls. On considère $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
   a. À quelle condition le produit matriciel AB est-il bien défini ?

   Le produit est bien défini si et seulement si $p = q$.

   b. Dans ce cas, à quel espace de matrices appartient la matrice AB ?

   Si AB est bien défini, $AB \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

   c. Donner, pour les entiers i, j adaptés, l'expression du coefficient $(AB)_{i,j}$ en fonction des coefficients de A et B.

   On a pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, r]\!]$, $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

2. Calculer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

On obtient $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Donner une expression explicite du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$$

La suite est arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation $\ell = 4\ell - 3$ qui a pour unique solution $\ell = 1$. On sait alors que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_0 - \ell)4^n + \ell = 4^n + 1.$$

4. Donner une expression explicite du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique $X^2 - X - 6$ a pour racines 3 et -2. Par conséquent, on sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$. On déduit des valeurs de u_0 et u_1 le système

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda + \mu = 2\\ 3\lambda - 2\mu = 1\end{array}\right. \qquad \textit{i.e.} \qquad \left\{\begin{array}{l}\lambda = 1\\ \mu = 1\end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 3^n + (-2)^n$.