Rudiments de logique – Ensembles

Logique

1 Écrire la proposition “La nuit, tous les chats sont gris” sous la forme d'une implication. Exprimer simplement sa négation, sa contraposée et sa réciproque.

2 Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dire lesquelles sont vraies.

1. Le carré de tout nombre réel est positif ou nul.
2. Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Il y a au moins un nombre réel strictement supérieur à tous les autres.
4. Entre deux nombres réels distincts, il y a toujours un nombre entier.

3 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis exprimer leur négation.

1. La fonction f est constante.
2. La fonction f est strictement décroissante.
3. La fonction f admet un minimum global.
4. La fonction f s'annule.
5. La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur.

4 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 4 \Rightarrow n > 2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1 \Rightarrow 2 \mid n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ n < 2 \Rightarrow n^2 = n$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ n < 0 \Rightarrow n > 0$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 5 \Leftrightarrow n > 4$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant 5 \text{ et } n \mid 12) \Leftrightarrow n = 6$.
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ (3 \mid n \text{ et } 4 \mid n) \Leftrightarrow 12 \mid n$.
8. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \mid 3 \text{ ou } n \mid 4) \Leftrightarrow n \mid 12$.

5 Simplifier l'écriture des ensembles suivants.

1. $\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 \text{ et } x < 2\}$.
2. $\{x \in \mathbb{R},\ (x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0\}$.
3. $\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1\}$.

6 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire la négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(1)| \leqslant \varepsilon.$$

Ensembles

7 Soient A et B deux ensembles. Montrer :

$$A = B \ \Leftrightarrow\ A \cup B = A \cap B.$$

8 Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

$$(A \cup B \subset A \cup C \ \text{ et } \ A \cap B \subset A \cap C) \ \Rightarrow\ B \subset C.$$

9 Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on a

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ =\ (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Cet ensemble est appelé *différence symétrique de A et B* et se note $A \Delta B$.

10 On considère deux ensembles E, F et $A \in \mathscr{P}(E)$, $B \in \mathscr{P}(F)$. Exprimer $\overline{A \times B}$ en fonction de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

11 Soient E, F deux ensembles.

1. Montrer que $\mathscr{P}(E \cap F) \ =\ \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
2. Est-il vrai que $\mathscr{P}(E \cup F) \ =\ \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$?

Raisonnements

12 Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

13 Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer en raisonnant par contraposée que la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon) \ \Rightarrow\ (x = 0).$$

14 Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

15 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

16 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.

17 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Montrer :

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

18 Montrer que toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction constante sur $[0, 1]$ et d'une fonction continue d'intégrale nulle sur $[0, 1]$.

19 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse, et commencer par déterminer $f(0)$ lorsque f est une fonction vérifiant la condition ci-dessus.

20 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Bonus

21 Dans l'Abbaye du Silence, les moines n'ont pas le droit de communiquer entre eux, d'aucune façon que ce soit. Ils ne peuvent par ailleurs pas regarder leur propre image. Les moines ne se voient qu'une fois dans la journée, à l'occasion du repas de midi qu'ils prennent tous autour de la même table.

Un dimanche midi, le chef de l'ordre prend la parole de manière exceptionnelle. Il explique aux moines qu'au moins l'un d'entre est atteint d'une maladie qui n'est pas contagieuse, mais qui se manifeste par l'apparition d'un point violet sur le front. Il demande alors aux moines qui se savent malades de quitter le monastère le soir du jour où ils ont connaissance de leur maladie.

Les jours passent ensuite sans qu'aucun moine ne quitte le monastère. Le dimanche suivant, un certain nombre de moines ne se présentent pas au repas commun.

Combien de moines étaient malades dans l'Abbaye du Silence ?