4. Rappels et compléments sur les fonctions réelles

Généralités

1 Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f, en commençant par déterminer son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
2. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.
3. $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$.

2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f \circ f(x) = x.$$

3 Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple de fonctions $(g, h) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ telle que g est paire, h est impaire, et $f = g + h$.

4 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

5 Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : &]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{1 - x^2} \end{array}$$

est bijective, et donner l'expression de f^{-1}.

6 Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \cos x + \cos(ax)$ est périodique si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.

Dérivation

7 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

8 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on introduit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f_m : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x + m}{x^2 + 1} \end{array}$$

dont on note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative.

1. Montrer que les tangentes au point d'abscisse 0 aux courbes $\mathscr{C}_m$ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes au point d'abscisse 1 aux courbes $\mathscr{C}_m$ sont concourantes.

9 Déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$(x - 1)\,e^x - ex + 1 \ = \ 0.$$

10 Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y + z \ = \ 3, \\ xyz \ = \ 1 \end{cases}$$

Fonctions logarithme et exponentielle

11 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{(x^x)}$.
5. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^x)^x$.

12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \ \leqslant \ \ln(1 + x) \ \leqslant \ x.$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

13 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation

$$x^{\sqrt{x}} \ = \ \left(\sqrt{x}\right)^x.$$

14 *Fonction* argsh

1. Montrer que la fonction sh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On notera argsh sa bijection réciproque.
2. Montrer que pout tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) \ = \ \sqrt{1 + x^2}.$$
3. Justifier que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{argsh}'(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{argsh}(x) \ = \ \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right).$$