6. Nombres complexes

Premiers calculs

1 Dans chacun des cas suivants, exprimer le nombre complexe z sous sa forme algébrique.

1. $z = (1-\mathrm{i})^2$.
2. $z = (2+\mathrm{i})^3$.
3. $z = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$.
4. $z = (2+\mathrm{i})^2(1-2\mathrm{i})$.

2 Dans chacun des cas, représenter l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la condition suivante.

1. $|z| = 2$.
2. $\mathfrak{Re}\, z = 1$.
3. $\mathfrak{Im}\, z = -2$.
4. $|z+1-2\mathrm{i}| = 1$.

3 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$. Montrer que

$$\frac{\mathrm{i}z-1}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; |z| = 1.$$

Généralités

4 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Montrer que

$$\frac{z+1}{z-1}$$

est imaginaire pur.

5 Déterminer tous les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^\star$ tels que

$$|z| \;=\; |1-z| \;=\; \left|\frac{1}{z}\right|.$$

6 Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 \;=\; 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

7 Déterminer tous les points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z + \bar{z} \;=\; |z|.$$

8 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-(1+i)| \leqslant 1$.

1. Montrer que
$$\sqrt{10}-1 \;\leqslant\; |z-4| \;\leqslant\; \sqrt{10}+1.$$
2. Dans quel cas a-t-on égalité pour chacune de ces inégalités ?
3. Donner une interprétation géométrique du résultat de 1.

9 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\bar{z}(z-1) \;=\; z^2(\bar{z}-1).$$

Equations polynomiales dans $\mathbb{C}$

10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0.$$

11 On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - (1+2\mathrm{i})z^2 + 3(1+\mathrm{i})z - 10(1+\mathrm{i}) \;=\; 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer les racines carrées complexes de $5-12\mathrm{i}$.
2. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
3. Résoudre (E).

Applications à la géométrie

12 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Déterminer la longueur du côté d'un polygone régulier à n côtés dont les sommets sont sur le cercle trigonométrique.

13 Déterminer tous les nombres complexes z tels que les points d'affixes respectifs 1, z et z^3 soient alignés.

14 Déterminer tous les ponts du plan dont l'affixe z vérifie $z + \bar{z} \;=\; |z|$.

Racines de l'unité

15 Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^3 \;=\; 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}).$$

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$.
2. $z^5 = \bar{z}$.
3. $(z^2+z+1)^2 + 1 = 0$.

17 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Écriture des nombres complexes

18 Exprimer les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

$$u = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}), \quad \text{et } v = 1 - \mathrm{i}.$$

En déduire la forme trigonométrique de $\frac{u}{v}$, puis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

19

1. Trouver tous les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|u| = |v| = 1$ et $u + v = -1$.
2. Trouver tous les triplets $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$ tels que $|u| = |v| = |w| = 1$ et $u + v + w = 0$. Proposer une interprétation géométrique.
3. Soient $\theta, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{i\psi} = 0$. Calculer $\mathrm{e}^{ki\theta} + \mathrm{e}^{ki\varphi} + \mathrm{e}^{ki\psi}$ pour $k \in \mathbb{N}$.