9. Suites numériques

Suites et limites

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2 *Lemme de Cesàro.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels. On introduit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

On souhaite montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors $(v_n)_n$ converge vers la même limite.

1. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers la même limite.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. On suppose que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   Montrer que $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1,\ |u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, comme
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

   Ainsi, si $n \geqslant N = \max(N_1, N_2)$, on a par inégalité triangulaire,
   $$\begin{aligned} |v_n| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\underbrace{|u_k|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}\frac{n\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$
   ce qui conclut.
2. Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

   On applique le résultat précédent à la suite $(u_n - \ell)$ qui converge vers 0. On a alors
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell = v_n - \ell$.
   Finalement, $v_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
3. Non : par exemple, si $u_n = (-1)^n$ pour tout n, la suite des moyennes de Cesàro converge, mais la suite (u_n) diverge.
4. Si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc
   $$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
   On en déduit alors par télescopage que
   $$\frac{1}{n-1}(u_n - u_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$
   Ainsi,
   $$\frac{u_n}{n} = \frac{n-1}{n}\,\frac{u_n - u_1}{n-1} + \frac{u_1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
   car $\frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{u_1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Existence de limite

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer qu'on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
2. Que peut-on en déduire pour $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

5 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ avec $a < b$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = a, \quad b_0 = b, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$$

Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles convergent vers une même limite.

Propriétés des suites

6 Donner dans chaque cas un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni majorée ni minorée.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, non majorée, et ne tend pas vers $+\infty$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et converge vers 0 mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

7 Pour tout entier $n \geqslant 3$, on note

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n\ln x \end{array}$$

1. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions, qu'on notera u_n et v_n, avec $u_n < v_n$. Vérifier que
$$\forall n \geqslant 3,\quad 0 < u_n < n < v_n.$$
   b. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *a.* Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < \mathrm{e}$.
   b. Pour tout $n \geqslant 3$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$, et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   c. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente, puis établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Suites extraites

8 Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

9 Montrer qu'une suite réelle croissante qui a une sous-suite majorée converge.

10 Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle non majorée, alors elle admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$.

11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12 Montrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

13 *Une autre preuve de Bolzano-Weierstrass.* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite réelle. On pose

$$A = \{n \in \mathbb{N},\ \forall k > n,\ u_k < u_n\}.$$

1. On suppose que A est infini. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une sous-suite décroissante.
2. On suppose que A est fini. Construire une sous-suite croissante de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
3. En déduire que toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

Suites récurrentes

14 On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} - 1.$$

Selon les valeurs de u_0, déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et sa limite éventuelle.

15 Soit $u_0 \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{u_n + |u_n|}{2}.$$

Suites particulières

16 Pour chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer une expression explicite du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 2\,(u_n)^2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2},\ u_1 = \dfrac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{3}{u_{n+1}} - \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$

17 On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ v_0 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2v_n, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Calculer alors u_n et v_n en fonction de n.

18 Déterminer une expression explicite du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$$