10. Matrices – Systèmes linéaires

Opérations sur les matrices

1 Calculer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \text{ où } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

2 Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices suivantes, lorsque l'opération est possible : AB, BA, AX, BX, A^2, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top B^\top$.

3 Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A le scalaire

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   a. Montrer que $\operatorname{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{tr} A + \mu \operatorname{tr} B$.
   b. Monter que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A, B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

4 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D (*i.e.* $AD = DA$).

5 Déterminer les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA.$$

6 On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est encore une matrice stochastique.

7 On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe p tel que $A^p = 0$. On suppose que A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A + B$ est nilpotente.

Calcul des puissances

8 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

9 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire des matrices A et I_3.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = u_n A + v_n I_3.$$
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R},\ v_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = 3v_n. \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$
2. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Matrices inversibles

11 Calculer l'inverse des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

12 On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 2A - 3I_3$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

13 Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^p = 0_{n,n}$. Montrer que la matrice $I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.

14 *Matrices à diagonale strictement dominante*. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Systèmes linéaires

15 Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 3z = -5 \\ 2x + y + 5z = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = 6 \\ 4x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x - 8y + 5z = 5 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$

16 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système $AX = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que le système $AX = B$ est compatible.

17 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur de m.

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^2 z = 1 \end{cases}$$

18 On considère un réel λ et le système suivant :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 4z = 0 \\ 3x - (4+\lambda)y + 12z = 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le système admet une unique solution.