12. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité, congruences

1 *Critères de divisibilité.*

1. Montrer que $n \in \mathbb{Z}$ est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
2. Montrer que $n \in \mathbb{Z}$ est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. Déterminer un critère de divisibilité par 11.

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{4^n} - 2$.

3 Montrer que 11 divise $2^{123} + 3^{121}$.

4 Montrer que l'équation

$$x^2 - 8y^2 = 3$$

n'admet pas de solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.

1. $x - 1 \mid x + 3$.
2. $x + 2 \mid x^2 + 2$.

6 Soit $p > 3$ un nombre premier. Montrer que

$$24 \mid p^2 - 1.$$

7 Montrer que si $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sont tels que

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

alors l'un au moins des entiers x, y, z est divisible par 3.

Division euclidienne

8 Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$. On note $a - 1 = bq + r$ la division euclidienne de $a - 1$ par b. Écrire la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Nombres premiers entre eux

9 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux nombres premiers entre eux. Montrer que ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

10 1. Soient

$$P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$$

un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\frac{p}{q}$ un rationnel sous forme irréductible. Montrer que si $\frac{p}{q}$ est racine de P, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

2. Déterminer toutes les racines rationnelles du polynôme $X^4 - 9X^3 + 13X^2 + X + 2$.

11 Trouver tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} x \equiv 2\ [10], \\ x \equiv 5\ [13] \end{cases}$$

12 Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} D_a \times D_b & \to & D_{ab} \\ (k, l) & \mapsto & kl \end{array}$$

est une bijection.

PGCD et PPCM

13 Dans chacun des cas suivants, déterminer $a \wedge b$, et préciser une relation de Bézout.

1. $a = 33,\ b = 24$.
2. $a = 37,\ b = 27$.
3. $a = 270,\ b = 105$.

14 Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} x \wedge y = 42, \\ x \vee y = 1680 \end{cases}$$

15 Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On considère l'équation

$$au + bv = c. \qquad (E)$$

d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que (E) admet une solution si et seulement si $a \wedge b \mid c$.
2. On considère une solution $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ de (E). Exprimer toutes les solutions de (E).

16 Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$a \wedge b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad N \backslash (a\mathbb{N} + b\mathbb{N}) \text{ est fini.}$$

Nombres premiers

17 Soit p un nombre premier tel que $p > 2$. Montrer que s'il existe un entier k tel que $k^2 \equiv -1\ [p]$, alors $p \equiv 1\ [4]$.

18 En utilisant l'exercice 17, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$, où $k \in \mathbb{N}$.

19 *Théorème de Wilson.* Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$.

1. Montrer que si $(p-1)! \equiv -1\ [p]$, alors p est premier.
2. *a.* Montrer que si p est premier, alors pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, il existe un unique $l \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $kl \equiv 1\ [p]$.

   b. En déduire la réciproque que 1.