13. Groupes, anneaux, corps

Groupes

1 Soit $(G,.)$ un groupe. Montrer que

$$Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}.$$

est un sous-groupe de G. On l'appelle le *centre* de G.

2 Soit $(G,.)$ un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = 1_G$. Montrer que G est abélien.

3 Soit $G =]-1,1[$. On introduit la loi $\star$ sur G définie par :

$$\forall x, y \in G,\quad x \star y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne pour G.
2. Montrer que $(G,\star)$ est un groupe abélien.

4 Soient G un groupe et H, H' des sous-groupes de G. Montrer que $H \cup H'$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset H'$ ou $H' \subset H$.

5 Soient $(G,\star)$ un groupe et H une partie finie et non vide de G stable par $\star$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

6 Soit $(G,.)$ un groupe.

1. Soit $a \in G$. Montrer que l'application $f_a : x \mapsto ax$ est une permutation de G.
2. On suppose G commutatif fini, de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que pour tout $a \in G$, on a $a^n = 1_G$.
   On pourra s'intéresser à $\prod_{x\in G} x$.
   b. Pour tout $a \in G$, on appelle ordre de a l'entier
   $$\operatorname{ord}(a) = \min\{k \in \mathbb{N}^\star,\ a^k = 1_G\}.$$
   Montrer que $\operatorname{ord}(a)$ divise n.
3. Déminer tous les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\star$.

Morphismes de groupes

7 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R}^\star \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

1. Montrer que f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}^\star,\times)$ dans $(\mathbb{R}^\star,\times)$.
2. Déterminer son image et son noyau.

8 Soit $(G,\star)$ un groupe. Pour tout $a \in G$, on pose

$$\sigma_a : \begin{array}{rcl} G & \to & G \\ x & \mapsto & a\star x\star a^{-1} \end{array}$$

1. Montrer que pour tout $a \in G$, σ_a est un automorphisme de G, et préciser $(\sigma_a)^{-1}$.
2. Montrer que $\varphi : a \mapsto \sigma_a$ définit un morphisme de groupes de $(G,\star)$ dans $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$.
3. Soit $S = \{\sigma_a,\ a \in G\}$. Montrer que $(S,\circ)$ est un groupe.

9 Montrer que $(\mathbb{R}^\star,\times)$ et $(\mathbb{C}^\star,\times)$ ne sont pas isomorphes.

Anneaux

10 *Anneau des entiers de Gauss* On considère

$$\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau.
2. Déterminer le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$.

11 *Anneau de Boole* Soit A un anneau tel que pour tout $x \in A$, on a $x^2 = x$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $2x = 0_A$.
2. En déduire que A est commutatif.
3. Montrer qu'en posant :
   $$\forall x, y \in A,\ x \preceq y \iff xy = x,$$
   on définit une relation d'ordre sur A.

12 Soit A un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Soient $x, y \in A$. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx est nilpotent.
2. Soient x, y deux éléments nilpotents de A qui commutent. Montrer que $x + y$ est nilpotent.
3. Monter que si $x \in A$ est nilpotent, alors $1_A - x$ est inversible, et déterminer son inverse.

13 Trouver tous les morphismes d'anneaux $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tels que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Corps

14 On considère

$$K = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

1. Montrer que si $a + b\sqrt{2} \in K$, avec $a, b \in \mathbb{Q}$, alors les entiers a et b sont uniques.
2. Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

15 Déterminer tous les sous-corps de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

16 Soit A un anneau non nul commutatif. Montrer que si A est fini et intègre, alors A est un corps.