14. Polynômes

Généralités

1 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$.

2 Résoudre les équations suivantes.

1. $Q^2 = XP^2$, où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.
2. $P \circ P = P$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.
3. $P(X^2) = (X^2+1)\,P$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.

3 Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$(X^2+1)P''(X) = 6P.$$

On pourra commencer par trouver le degré des solutions.

4 Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants.

1. $Q = X - a$.
2. $Q = (X-a)(X-b)$.
3. $Q = (X-a)^2$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(X-1)^2$ divise le polynôme

$$aX^{n+1} + bX^n + 1.$$

6 Soient a, b, k trois entiers naturels. En ayant recours à des polynômes, calculer

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{k-i}.$$

7 Déterminer $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$, $P(2) = 4$.

Racines

8 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine de multiplicité 3 du polynôme

$$Q = (X-a)(P' + P'(a)) - 2(P - P(a))$$

9 Soit un entier $n \geqslant 2$. Montrer que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

n'a pas de racine multiple.

10 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P = n$ et

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(k) = \frac{1}{k}.$$

Déterminer $P(-1)$.

On pourra s'intéresser au polynôme $Q = XP(X) - 1$.

11

1. Trouver un polynôme de degré 2 à coefficients entiers qui a $1 + \sqrt{2}$ pour racine.
2. En déduire une manière de calculer $P(1+\sqrt{2})$, où $P(X) = 2X^5 - 4X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 5X - 4$.

12 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 2$.

1. Montrer que si P admet n racines distinctes, alors P' est scindé et admet $n-1$ racines distinctes.
2. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

13 Dans les deux cas suivants, factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $P = X^3 + X^2 + X + 1$.
2. $P = X^7 - X^6 + X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$.

14 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

15 *Localisation des racines.* Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ avec $a_0 \neq 0$. On introduit les polynômes :

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, \qquad Q = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| X^k.$$

1. Montrer que Q admet exactement une racine dans $[0, +\infty[$, notée ρ.
2. En déduire que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors $|z| \leqslant \rho$.