

22. Intégration sur un segment

Calcul de primitive

1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
2. $x \mapsto \tan^2 x$.
3. $x \mapsto \frac{1}{x + x \ln^2(x)}$.
4. $x \mapsto \operatorname{th} x$.
5. $x \mapsto \cos^2 x$.
6. $x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$.
7. $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

2 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$.

3 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x \cos(2x)$.
2. $x \mapsto x e^x \sin x$.

4 En effectuant une ou plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \arctan x$.
2. $x \mapsto x^2 \ln x$.
3. $x \mapsto x \arctan x$.
4. $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.
5. $x \mapsto x^2 \sin x$.

5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 4}$.
3. $x \mapsto \frac{3x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$.
4. $x \mapsto \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 2}$.

6 À l'aide d'un changement de variable bien choisi, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$.
2. $x \mapsto \frac{x}{1 + x^4}$.
3. $x \mapsto \frac{1}{e^{2x} + e^{-x}}$.

7 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$.
2. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$.
3. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx$.

8 Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{\arcsin \sqrt{x}}{(1 - x)^{3/2}}$$

Propriétés de l'intégrale

9 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $c \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = c.$$

Montrer que f est périodique.

11 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[0, 1]$.

12 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt.$$

13 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_a^b \sin(nt) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

14 Soit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\int_0^1 f(t^n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

Sommes de Riemann

15 Montrer que

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

16 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k}.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$

17 Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \neq 1$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \ln(\alpha^2 - 2\alpha \cos(t) + 1) dt.$$

Intégrales de Wallis

18 On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. a. Étudier la monotonie puis la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Formules de Taylor

19 À l'aide de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

20 Déterminer une approximation de $\cos \frac{1}{2}$ à $5 \cdot 10^{-2}$ près.

21 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et une formule de Taylor appropriée, montrer que (u_n) converge vers $\ln 2$.